PRO GRADU -TUTKIELMA

Salla Jokinen

Vektorialgebran kouluopetus Suomessa

TAMPEREEN YLIOPISTO
Informaatiotieteiden yksikkö
Matematiikka

Joulukuu 2014

Tampereen yliopisto
Informaatiotieteiden yksikkö
JOKINEN, SALLA: Vektorialgebran kouluopetus Suomessa
Pro gradu -tutkielma, 42 s.
Matematiikka
Joulukuu 2014

Tiivistelmä

Tässä tutkielmassa selvitettiin, kuinka vektorialgebran opetus on muuttunut viimeisten vuosikymmenten saatossa Suomessa. Aluksi tutkielmassa on tutustuttu vektorialgebran perusteisiin sekä sovelluskohteisiin kouluopetuksessa. Koulussa opetettaviin sisältöihin on perehdytty opetussuunnitelmien sekä oppikirjojen avulla. Tutkittavaksi valittiin ajanjakso 1970-luvulta tähän päivään. Vektorialgebran opetuksen huippuvuodet sijoittuvat selvästi 1970-luvulle, jolloin matematiikan opetusta pyrittiin uudistamaan. Tällöin vektorialgebran opetusta oli kaikille oppilaille peruskoulussa sekä lukiossa ja vektoreita käytettiin runsaasti soveltaviin tehtäviin. Tämän jälkeen opetus on vähentynyt ja siirtynyt ainoastaan lukioon ja sielläkin 1990-luvulla vain pidemmän oppimäärän opiskelijoille. Uusin opetussuunnitelma kuitenkin nosti vektorialgebran takaisin myös lyhyempään oppimäärään, tosin vain valinnaiselle syventävälle kurssille. Kurssimuotoiseen lukioon siirtymisen myötä myös aihealueiden integrointi vähentyi ja näin ollen vektoreiden hyödyntäminen muissa matematiikan osa-alueissa vähentyi. On vaikea tietää nostaako seuraava opetussuunnitelma vektorialgebraa jälleen enemmän opetukseen.

Asiasanat Vektorialgebra, vektorit, oppikirja, opetussuunnitelma.

Sisältö

1 Johdanto

Koulun kehittämisestä puhutaan jatkuvasti ainakin alan ihmisten kesken ja tätä kautta myös koulumatematiikan kehitys nousee esille. Jotta matematiikan opetusta voitaisiin kehittää eteenpäin, on tiedettävä, mistä tämän päivän tilanteeseen on tultu. Koko koulumatematiikan kehitys vain muutamaltakin vuosikymmeneltä olisi massiivinen teos, joten on syytä pilkkoa sitä pienempiin osiin. Tässä tutkielmassa tutustutaan matematiikan kehittymiseen vektorialgebran näkökulmasta. Vaikka se onkin suppea näkökulma, kertoo se jotakin matematiikan opetuksen kehityksestä. Samankaltainen pro gradu -tutkielma on tehty muun muassa differentiaalilaskennasta [5].

Tässä tutkielmassa selvitetään, kuinka vektorialgebran opetus Suomen kouluissa on muuttunut viimeisimpien vuosikymmenten aikana. Tutkittavaksi valitaan ajanjakso peruskoulu-uudistuksesta eli 1970-luvusta tähän päivään. Aiemmissa oppikoulun oppiennätyksissä, 1941 [39] ja 1960 [20][21], vektoreita ei ole mainittu, joten tutkimista ei ole syytä laajentaa tähän suuntaan. Tutkielman pohjana toimivat kansalliset opetussuunnitelmat sekä opetussuunnitelman perusteet, joidan avulla selvitetään, kuinka laajalti vektoreita on kouluissa tullut opettaa. Opetussuunnitelmien sekä opetussuunnitelman perusteiden lisäksi perehdytään vektoreita käsitteleviin oppikirjoihin jokaisen opetussuunnitelman aikakaudelta.

Tutkielman tarkoituksena on selvittää, kuinka paljon vektorialgebraa on opetettu kullekin vuosiluokalle eri opetussuunnitelmien aikana. Lisäksi selvitetään, millaisen pohjan opetussuunnitelma on antanut oppikirjojen tekemiseen ja kuinka opetussuunnitelma oppikirjoissa toteutuu.

Tutkittava ajanjakso alkaa suuresta Suomen koulujärjestelmän murroksesta. 1970-luvun alussa kansakouluista ja oppikouluista siirryttiin peruskouluihin ja lukioihin, joille molemmille tulivat omat opetussuunnitelman perusteensa. Opetussuunnitelman perusteet toimivat pohjana opetuksen järjestäjille oman opetussuunnitelman laadintaan. Lukiossa tosin siirryttiin kansallisiin opetussuunnitelman perusteisiin vasta 1980-luvulla. Tätä ennen käytössä oli kansallinen opetussuunnitelma, jolloin opetuksen järjestäjät eivät tehneet omaa opetussuunnitelmaansa. Jatkossa puhutaan kuitenkin yksinkertaisuuden vuoksi yleisesti opetussuunnitelmasta tarkoitettaessa kansallista opetussuunnitelmaa tai sen perusteita.

Miksi vektorialgebraa sitten tulisi koulussa opettaa? Vektoreita käytetään paljon matematiikan lisäksi myös fysiikassa ja tilastotieteessä. Melko harva suomalainen kuitenkaan arjessaan tai edes työssään käyttää vektoreita. Koko ikäluokalle vektoreiden hallinta ei ole välttämättömyys, mutta lukiosta jatko-opintoihin suuntaavat tarvitsevat vektoreita usein. Etenkin matemaattis-luonnontieteellisillä aloilla vektoreihin törmää miltei varmasti. Toisaalta vektoreilla voidaan havainnollistaa helposti monia arjen ilmiöitä, kuten tuulta tai voimaa, joten niiden ymmärtämisestä voi olla hyötyä kaikille.

Tällä hetkellä lukiossa vektoreita opetetaan, mutta yliopistot eivät näytä luottavan, että opiskelijat olisivat oppineet vektorialgebran perusteet jo lukiossa. Esimerkiksi Tampereen teknillisen yliopiston kaikille pakollisella toisella insinöörimatematiikka -kurssilla [9] aiheena on lineaarialgebra ja liikkeelle lähdetään vektoreiden kertaamisesta. Melko nopeasti peruslaskutoimitukset kuitenkin käydään läpi, joten jotain muistikuvia opiskelijoilla kenties uskotaan olevan, mutta mitään ei oleteta osattavaksi. Myös Tampereen yliopiston kurssilla Lineaarialgebra 1 A [3] käsitellään vektoreita, ja käsittely aloitetaan perusasioista. Eteneminen on toki matemaattista ja nopeaa, mutta ilman vektoreiden aiempaa osaamistakin pärjää.

Vektorialgebran hallintaa ei välttämättä tarvita jatko-opinnoissa, mutta sen hallinnasta on selvää hyötyä. Onkin mielenkiintoista, kuinka nykyiseen tilanteeseen on vektorialgebran opetuksessa tultu ja kuinka sen asema on nykyisin kehittymässä. Vektorialgebran opetus peruskoulussa tai lukiossa ei ole selviö tai edes välttämättömyys, joka tekeekin sen tutkimisesta mielenkiintoista. Kuinka tärkeänä vektorialgebra on nähty eri opetussuunnitelmissa?

Tässä tutkielmassa tutustutaan ensin vektorialgebran perusteisiin ja niiden soveltavaan käyttöön koulussa. Tämän jälkeen avataan eri opetussuunnitelmien ja oppikirjojen sisältöjä vektorialgebran näkökulmasta sekä tehdään tuloksista yhteenvetoa.

2 Vektorialgebra

Tässä luvussa esitellään matemaattisesti vektorialgebran perusteet eli peruskäsitteet sekä -laskutoimitukset. Kaikki käsitellyt asiat eivät tule kouluopetuksessa esille, mutta liittyvät siihen kiinteästi. Toisaalta mukaan on otettu myös muutamia sovelluskohteita, jotka näkyvät lähinnä koulukirjoissa.

Vektorialgebralla tarkoitetaan vektorianalyysin osa-aluetta, jossa perehdytään vektoreiden laskusääntöihin. Luku pohjautuu pääosin Väisälän teokseen Vektorianalyysi [10, s. 7–28] sekä Hsun teokseen Vector Analysis [4, s. 1–22]. Lisäksi tukena on käytetty sähköistä matematiikan tietosanakirjaa [6], Tampereen teknillisen yliopiston materiaalia Johdatus korkeakoulumatematiikkaan [7] sekä Saarimäen teosta Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa [8].

2.1 Vektoreiden peruskäsitteet

Kun mielivaltaisesta suorasta rajataan pisteiden $A = (x_1,\ y_1)$ ja $B = (x_{2,} y_2)$ välinen osuus ja annetaan näin syntyneelle janalle suunta, saadaan **suuntajana** AB, jonka alkupiste on A ja loppupiste B. Tällöin suuntajanan vaakasiirtymä on $x_2 - x_1$ ja pystysiirtymä $y_2 - y_1$. Jos tarkastellaan toisaalta pistettä $C = (x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ sekä suuntajanaa OC origon ja pisteen C välillä, todetaan, että suuntajanat AB ja OC ovat yhdensuuntaiset sekä yhtä pitkät. Tällöin on myös luonnollista määritellä, että $C = B - A$.

Määritelmä 2.1. Kaksi suuntajanaa AB ja CD ovat keskenään *ekvivalentit*, $AB \sim CD$, jos $B - A = D - C$.

Suuntajanojen ekvivalenttisuus on *ekvivalenssirelaatio*, koska sillä on seuraavat ominaisuudet:

$AB \sim AB$ (reflektiivisyys)

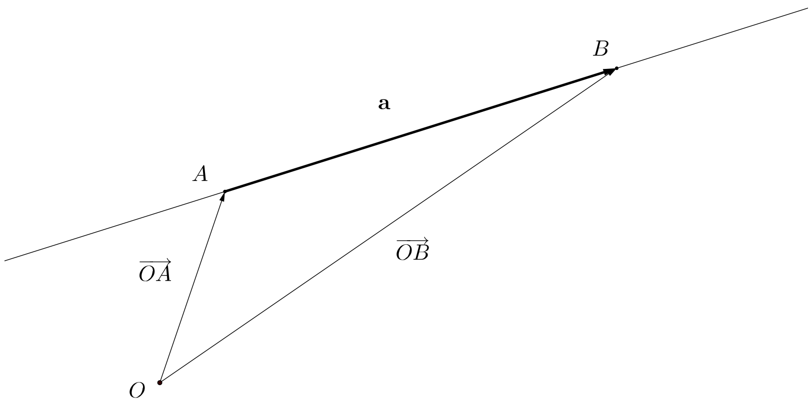
Jos $AB \sim CD$, niin $CD \sim AB$. (symmetrisyys)

Jos $AB \sim CD$ ja $CD \sim EF$, niin $AB \sim EF$. (transitiivisuus)

Keskenään ekvivalentit suuntajanat muodostavat ekvivalenssiluokan ja tällaista ekvivalenssiluokkaa kutsutaan *vektoriksi*. Suuntajanat ovat tällöin vektorin edustajia. Usein näistä edustajista kuitenkin puhutaan vektoreina, vaikka kyseessä täsmällisesti olisikin suuntajana. Tästä eteenpäin käytetään sanaa vektori myös tässä tekstissä hieman vapaammin tarkoittamaan myös vektorin edustajia.

Jokaisen pisteen voidaan ajatella myös edustavan suuntajanaa origon ja pisteen välillä. Tällöin suuntajana on eräs tämän suuntaisen ja suuruisen vektorin edustaja. Jokaiselle vektorille voidaankin asettaa edustaja alkamaan origosta tai mielivaltaisesta avaruuden pisteestä A. Origosta pisteeseen P päättyvää vektorin edustajaa kutsutaan pisteen P *paikkavektoriksi*.

Graafisesti vektorin edustajaa esitetään nuolella, jolla on **suunta** ja **suuruus** eli sen pituus. Kuvassa 2.1 on havainnollistettu tilannetta. Tekstissä vektorista puhuttaessa merkitään vektorin nimeä kirjaimella, jonka päällä on viiva tai nuoli ($\overline{a}, \overrightarrow{a}$) tai yksinkertaisemmin vahvistetulla kirjaimella ($\mathbf{a}$), kuten tässä tekstissä. Jos on tarvetta korostaa vektorin alku- ja päätepisteitä, kuten paikkavektorilla, voidaan se nimetä niiden mukaisesti $\left(\overrightarrow{OA}\right)$.



Kuva 2.1. Suuntajana AB, vektorin $\mathbf{a}$ edustaja, sekä paikkavektorit $\overrightarrow{OA}$ ja $\overrightarrow{OB}$.

Vektoreita käytetään muun muassa kuvaamaan fysikaalisia vektorisuureita, joilla on suunta ja suuruus, kuten nopeus tai kiihtyvyys. Vektorisuureiden lisäksi on myös skalaarisuureita, joilla on vain suuruus, kuten paino.

Vektorin suuruutta kuvataan suuntajanan pituudella ja sitä kutsutaan myös vektorin *itseisarvoksi*. Vektorin $\mathbf{a}$ suuruudesta käytetään merkintää $|\mathbf{a}|$ ja se on jokin ei-negatiivinen reaaliluku. Jos vektorin $\mathbf{a}$ pituus $|\mathbf{a}| = 1$, kutsutaan sitä *yksikkövektoriksi*. Jos vektorilla ei ole lainkaan pituutta eli se vastaa suuntajanaa AA, kutsutaan vektoria *nollavektoriksi* $\mathbf{0}$, jonka pituus $|\mathbf{0}| = 0$, eikä sen suuntaa ole määritetty.

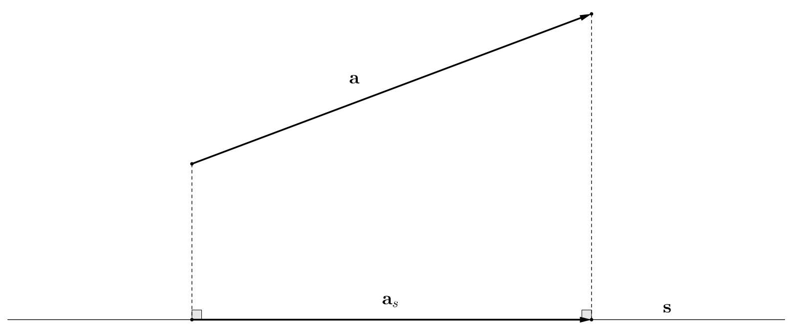
Jos kahden suuntajanan määrittämät suorat ovat yhdensuuntaiset, voidaan sanoa myös vektoreiden, joita suuntajanat edustavat, olevan *yhdensuuntaisia*. Yhdensuuntaisia vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ merkitään seuraavasti $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$. Muussa tapauksessa vektorit ovat erisuuntaisia, $\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b}$. Yhdensuuntaiset vektorit voivat kuitenkin olla *samansuuntaiset* tai *vastakkaissuuntaiset*. Nollavektorin suunta voidaan määritellä useilla tavoille, mutta ajatellaan jatkossa, ettei nollavektorille voida määrittää yhdensuuntaisuutta.

Kahden vektorin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ sanotaan olevan yhtäsuuret, eli $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, jos ja vain jos ne ovat samansuuntaiset ja samanpituiset (eli sama suunta ja suuruus). Lisäksi jokaisella vektorilla $\mathbf{b}$ on olemassa *vastavektori* $-\mathbf{b}$, joka voidaan määritellä vektoria edustavan suuntajanan kautta siten, että sen alku- ja loppupiste vaihtavat paikkaa. Vastavektorilla on siis sama suuruus, mutta sen suunta on vastakkainen.

2.2 Vektorit koordinaatistossa

Tutustutaan seuraavaksi vektoreihin tarkemmin tutussa ympäristössä, karteesisessa koordinaatistossa. Tätä varten on kuitenkin ensin tutustuttava vektorin komponentteihin jakoon sekä määriteltävä vektoreiden lineaarinen riippumattomuus.

Määritelmä 2.2. Olkoon s mielivaltainen suunnattu suora ja $\mathbf{a_s}$ vektori, jonka alkupiste ja kärki ovat vektorin $\mathbf{a}$ alkupisteen ja kärjen projektiot suoralle s (ks. kuva 2.2). Tällöin $\mathbf{a_s}$ on vektorin $\mathbf{a}$ *vektorikomponentti* suoralla s. Vektorikomponentti $\mathbf{a_s}$ voidaan ilmoittaa myös suoran s suuntaisen yksikkövektorin $\mathbf{e}$ avulla $\mathbf{a_s} = \mathrm{a_s}\,\mathbf{e}$, jossa $\mathrm{a_s} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a}, s)$ ja kulmalla $(\mathbf{a}, s)$ tarkoitetaan vektorin $\mathbf{a}$ ja suoran s suuntien välistä pienempää kulmaa. $\mathrm{a_s}$ on nyt vektorin $\mathbf{a}$ *skalaarikomponentti* suoralla s ja se on positiivinen, jos kulma $(\mathbf{a}, s)$ on terävä tai negatiivinen jos kulma on tylppä. Jos kulma on suora, $\mathrm{a_s} = 0$.



Kuva 2.2. Vektorin $\mathbf{a}$ vektoriprojektio suoralla s.

Suunnatun suoran asemasta projektio voidaan muodostaa myös toiselle vektorille. Jos kuvataan koordinaatiston positiivisten suuntien akseleita yksikkövektoreiden avulla, saadaan vektorit ilmoitettua komponenttiensa avulla koordinaatistossa.

Määritelmä 2.3. Olkoon $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}\}$ joukko vektoreita ja $k_1, k_2, \ldots, k_n$ reaalilukuja. Jos vektoriyhtälölle $k_1\mathbf{a_1} + k_2\mathbf{a_2} + \ldots + k_n\mathbf{a_n} = \mathbf{0}$, on olemassa ainoastaan yksi ratkaisu: $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$, kutsutaan vektoreita $\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \ldots, \mathbf{a_n}$ *lineaarisesti riippumattomiksi.*

Jos vektoriyhtälölle $k_1\mathbf{a_1} + k_2\mathbf{a_2} + \ldots + k_n\mathbf{a_n} = \mathbf{0}$ löytyy muita ratkaisuja, kutsutaan vektoreita lineaarisesti riippuviksi. Tällöin kyseisillä vektoreilla on olemassa keskinäistä riippuvuutta, ja jokin niistä voidaan ilmaista muiden avulla.

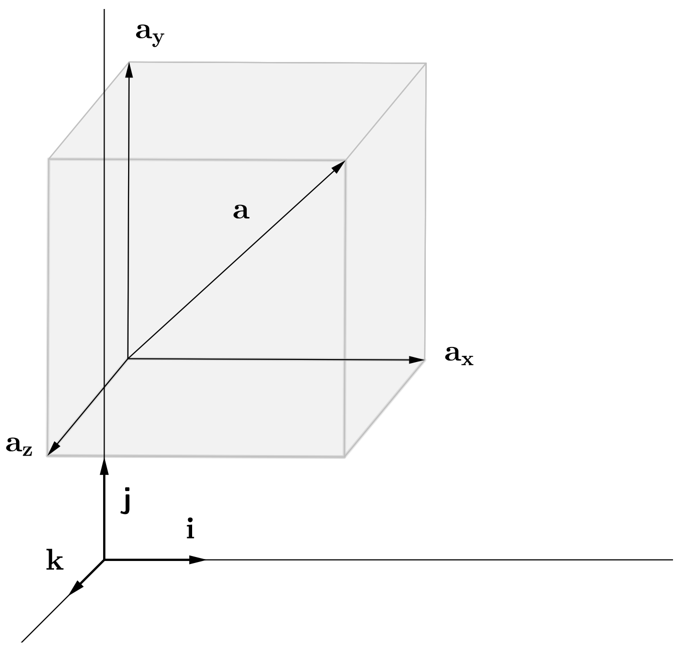
Jos mietitään avaruuden kolmiulotteista karteesista koordinaatistoa huomataan, että sen positiivisen suunnan akseleita kuvaavia vektoreita ei voida kuvata toistensa avulla.

Määritelmä 2.4. Kolmiulotteisen karteesisen koordinaatiston positiivisen suunnan akseleiden suuntaiset yksikkövektorit $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ ovat lineaarisesti riippumattomia ja muodostavat kolmiulotteisen avaruuden kannan. Näitä vektoreita kutsutaan myös *kantavektoreiksi.*

Nyt vektorin $\mathbf{a}$ skalaarikomponentit koordinaattiakseleilla ovat
$\mathrm{a_x} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a},\ \mathbf{i})$, $\mathrm{a_y} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a},\ \mathbf{j})$ ja $\mathrm{a_z} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a},\ \mathbf{k})$, kun vektori laitetaan alkamaan origosta. Tällöin skalaarikomponentit vastaavat käytännössä vektorin päätepisteen koordinaatteja. Vektorin $\mathbf{a}$ vektorikomponentit saadaan skalaarikomponenttien ja kantavektoreiden avulla $\mathbf{a_x} = \mathrm{a_x}\mathbf{i}$, $\mathbf{a_y} = \mathrm{a_y}\mathbf{j}$, $\mathbf{a_z} = \mathrm{a_z}\mathbf{k}$, jolloin vektori $\mathbf{a}$ voidaan ilmoittaa muodossa $\mathbf{a} = \mathbf{a_x} + \mathbf{a_y} + \mathbf{a_z}$ tai $\mathbf{a} = \mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$.

Esimerkiksi vektori $\mathbf{a}$, joka päättyy pisteeseen $(x,\ y,\ z)$ ja voidaan merkitä seuraavasti $\mathbf{a} = (x,\ y,\ z)$, voidaan ilmoittaa muodossa $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Tätä voidaan kutsua vektorin *koordinaattiesitykseksi.*

Vektorin $\mathbf{a}$ voidaan nyt ajatella olevan suorakulmaisen särmiön avaruuslävistäjä, jonka särmät ovat sen vektorikomponentit. Kuvassa 2.3 on havainnollistettu tilannetta.



Kuva 2.3. Vektorin $\mathbf{a}$ vektorikomponentit.

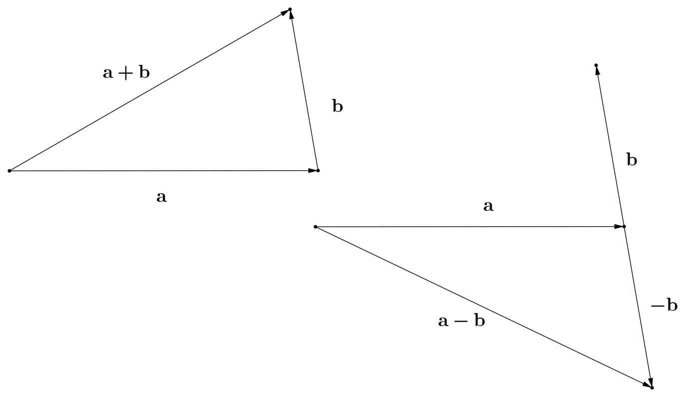
Koordinaattiakseleiden yksikkövektoreiden avulla voidaan esittää kaikki avaruuden vektorit. Toisaalta riittää, jos kolme vekoria $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ eivät ole samassa tasossa ja ne asetetaan alkamaan samasta pisteestä. Näiden avulla voidaan esittää kaikki avaruuden vektorit $\mathbf{d}$ muodossa $\mathbf{d} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$, missä $r, s, t \in \mathbb{R}$. Samoin pätee kaksiulotteisessa tasossa, jolloin riittää kaksi tason vektoria, jotka eivät ole samalla suoralla. Väitteet ovat intuitiivisesti selviä ajateltaessa avaruudessa vektorit suuntaissärmiön särmiksi ja tasossa vektorit suunnikkaan kyljiksi.

2.3 Vektoreiden peruslaskutoimitukset

2.3.1 Summa ja erotus

Määritellään vektoreiden peruslaskutoimituksista ensimmäisenä kahden vektorin summa ja erotus. Aloitetaan vielä suuntajanoilla. Suuntajanat $\overrightarrow{PR}$ ja $\overrightarrow{RS}$ yhdistää kolmioksi suuntajana $\overrightarrow{PS}$. Jos pisteitä P' ja R' yhdistää suuntajanan $\overrightarrow{PR}$ kanssa ekvivalentti suuntajana $\overrightarrow{P'R'}$ ja samoin pisteitä R' ja S' yhdistää suuntajanan $\overrightarrow{RS}$ kanssa ekvivalentti suuntajana $\overrightarrow{R'S'}$, on muodostuva suuntajana $\overrightarrow{P'S'}$ myös ekvivalentti suuntajanan $\overrightarrow{PS}$ kanssa, $\overrightarrow{P'S'} \sim \overrightarrow{PS}$. Näin ollen voidaan siirtyä puhumaan vektoreista. Vektoreiden summaa havainnollistetaan kuvassa 2.4.

Määritelmä 2.5. Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ *summa* $\mathbf{a}+\mathbf{b}$ tarkoittaa vektoria, joka alkaa vektorin $\mathbf{a}$ kanssa samasta pisteestä ja päättyy vektorin $\mathbf{b}$ kanssa samaan pisteeseen, kun vektori $\mathbf{b}$ asetetaan alkamaan pisteestä, johon vektori $\mathbf{a}$ päättyy. Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ *erotus* määritellään vastavektorin avulla vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $-\mathbf{b}$ summana, $\mathbf{a}-\mathbf{b}=\mathbf{a}+(-\mathbf{b})$.

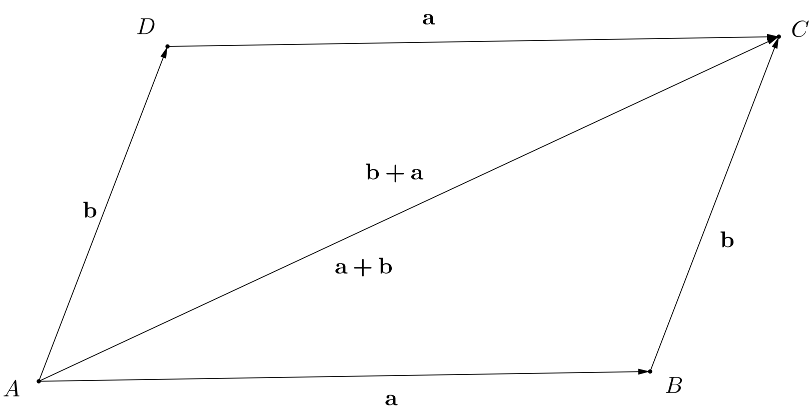


Kuva 2.4. Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ summa ja erotus.

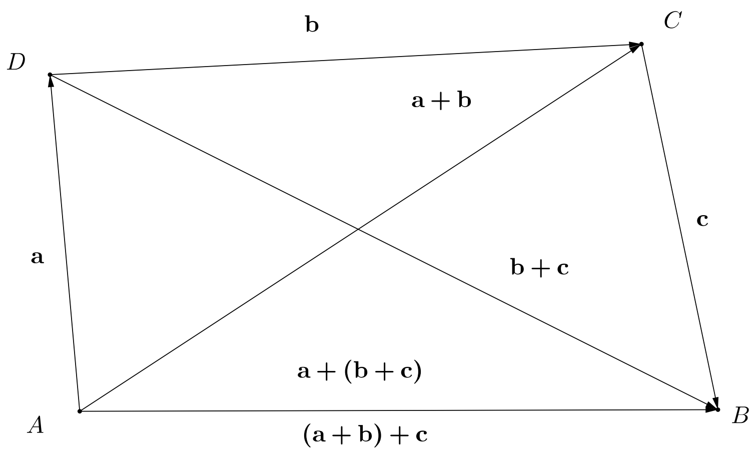
Kantavektoreiden avulla voidaan esittää kahden vektorin summa seuraavasti: $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (\mathrm{a_x}+\mathrm{b_x})\,\mathbf{i}+(\mathrm{a_y}+\mathrm{b_y})\,\mathbf{j}+(\mathrm{a_z}+\mathrm{b_z})\,\mathbf{k}$.

Lause 2.6. *Vektoreiden summalle on voimassa vaihdantalaki* $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\mathbf{b}+\mathbf{a}$ *sekä liitäntälaki* $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}$.

Todistus. Todistetaan lause kuvien 2.5 ja 2.6 avulla käyttäen apuna suuntajanoja. Kuvasta 2.5 nähdään, että summat saadaan muotoon $\mathbf{a}+\mathbf{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ ja $\mathbf{b}+\mathbf{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$. Näin on saatu todistettua vaihdantalaki. Kuvassa 2.6 on piirretty nelikulmio, jonka kolme sivua ovat $\mathbf{a},\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ ja näin ollen neljäs sivu on sekä $\mathbf{a}+(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}$ että $(\mathbf{a}+\mathbf{b})+\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}+\mathbf{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}$. Eli on saatu todeistettua myös liitäntälaki. □



Kuva 2.5. Vaihdantalain todistuksen havainnollistus.



Kuva 2.6. Liitäntälain todistuksen havainnollistus.

Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ voidaan ajatella muodostavan tasolla olevan suunnikkaan kyljet kuten kuvissa, jolloin näiden summavektori on kyseisen suunnikkaan lävistäjä. Vektoreiden summa on voimassa myös kolmiulotteisessa avaruudessa, jolloin summavektori muodostuu jonkin suuntaissärmiön avaruuslävistäjäksi.

2.3.2 Vektorin kertominen skalaarilla

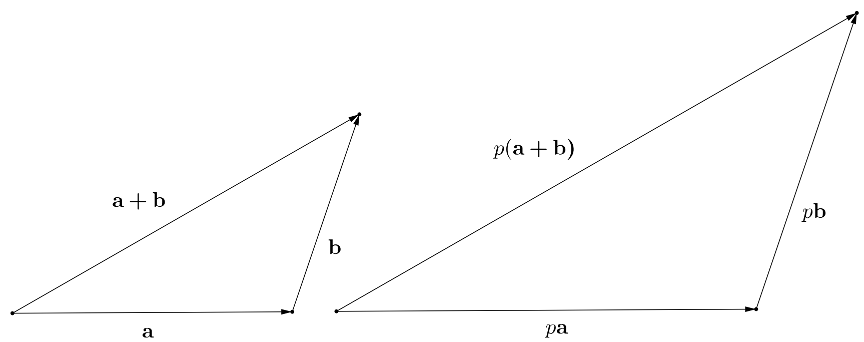
Perehdytään seuraavaksi vektorin kertomiseen skalaarilla sekä skalaarilla kertomisen laskulakeihin.

Määritelmä 2.7. Olkoon p jokin mielivaltainen reaaliluku ja $\mathbf{a}$ jokin mielivaltainen vektori. *Tulolla* $p\mathbf{a}$ tarkoitetaan vektoria, jonka pituus on $|p|\,|\mathbf{a}|$ ja joka on yhdensuuntainen vektorin $\mathbf{a}$ kanssa. Jos $p > 0$, $p\mathbf{a}$ on samansuuntainen vektorin **a** kanssa. Jos $p < 0$, $p\mathbf{a}$ on vastakkaissuuntainen vektorin **a** kanssa. (Nollavektorille ei voida määritellä yhdensuuntaisuutta.)

Lause 2.8. *Skalaarilla kertomiselle on voimassa seuraavat kertolaskun peruslait:*
Liitäntälaki $p(q\mathbf{a}) = (pq)\mathbf{a}$
Osittelulaki 1 $p(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = p\mathbf{a} + p\mathbf{b}$
Osittelulaki 2 $(p + q)\,\mathbf{a} = p\mathbf{a} + q\mathbf{a}$

Todistus. Liitäntälaki sekä osittelulaki 2 seuraavat suoraan reaalilukujen kertolaskun laskulaeista. Osittelulaki 1 voidaan todistaa piirtämällä ensin kolmio, jonka lyhyet sivut ovat vektorit **a** ja **b**. Tästä tiedämme jo vektoreiden yhteenlaskun mukaisesti, että pisin sivu voidaan ilmoittaa muodossa $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Jos kolmion jokaista sivua kasvatetaan nyt mittakaavassa $p : 1$, eli kerrotaan kukin sivu skalaarilla p, saadaan kolmio, jonka sivut ovat $p\mathbf{a}$, $p\mathbf{b}$ ja $p(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. Tällöin vektoreiden yhteenlaskun mukaisesti voidaan todeta, että $p\mathbf{a} + p\mathbf{b} = p(\mathbf{a} + \mathbf{b})$. On siis saatut todistettua osittelulaki 1 vektorin skalaarilla kertomiselle. □

Kuvassa 2.7 on havainnollistettu tilannetta.



Kuva 2.7. Skalaarilla kertomisen osittelulaki 1 todistuksen havainnollistus.

Komponentteihin jaetun vektorin kertominen skalaarilla tapahtuu ensimmäisen osittelulain mukaisesti komponentti kerrallaan. Jos $\mathbf{a} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, niin $p\mathbf{a} = px\mathbf{i} + py\mathbf{j} + pz\mathbf{k}$.

2.4 Skalaaritulo

Vektoreiden laskusäännöt alkavat erota reaaliluvuista merkittävästi kertolaskun kohdalla. Vektoreille käytetään yleisesti kahta erilaista kertolaskua.

Perehdytään ensimmäiseksi kahden vektorin tuloon, jossa tulona on skalaari, eli skalaarituloon. Tätä kutsutaan myös pistetuloksi sen merkintätavasta johtuen. Skalaaritulon avulla voidaan saada tietoa kahden vektorin välisestä kulmasta, jolla tarkoitetaan aina pienempää muodostuvista kahdesta kulmasta, kun vektorit asetetaan alkamaan samasta pisteestä.

Määritelmä 2.9. Kahden vektorin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ *skalaaritulo*

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$$

missä $(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ tarkoittaa vektoreiden välistä pienempää kulmaa, jolloin kulma $0 \leq (\mathbf{a},\, \mathbf{b}) \leq \pi$, kun $\mathbf{a},\, \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$. Jos $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ tai $\mathbf{b} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$.

Kahden vektorin skalaaritulo on positiivinen skalaari, jos vektoreiden välinen kulma on terävä, tai negatiivinen skalaari, jos vektoreiden välinen kulma on tylppä.

Skalaaritulo voidaan myös merkitä skalaarikomponentin avulla, koska vektorin $\mathbf{a}$ vektorilla $\mathbf{b}$ oleva skalaarikomponentti $\mathrm{a_b} = |\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$, joten $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = \mathrm{a_b}\,|\mathbf{b}|$.

Lause 2.10. *Kaksi vektoria* $\mathbf{a}$ *ja* $\mathbf{b}$ *ovat kohtisuorat täsmälleen silloin, kun niiden skalaaritulo on nolla* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Lause on helposti perusteltavissa kosinin arvolla, joka on nolla vain, kun kulma on suora.

Vektorin skalaaritulo itsensä kanssa $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a^2} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{a}| \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{a}) = |\mathbf{a}|^2 \cos(0)$ $= |\mathbf{a}|^2$, koska $\cos(0) = 1$. Näin ollen vektorin pituus saadaan määritettyä pistetulon avulla eli $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2 \Rightarrow |\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Lause 2.11. *Skalaaritulolle on voimassa seuraavat laskulait:*
Vaihdantalaki $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$
Liitännäisyys skalaarilla kertomisen kanssa $(p\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{b}) = p\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
sekä yleisemmin $(p\mathbf{a}) \cdot (q\mathbf{b}) = pq\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
Osittelulaki 1. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$
Osittelulaki 2. $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{a}$

Skalaaritulon liitännäisyys on luonnollisesti mahdoton, koska skalaarin ja vektorin välistä skalaarituloa ei ole määritelty.

Todistus. Vaihdantalaki voidaan todistaa suoraan määritelmän ja tulon vaihdannaisuuden avulla. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = |\mathbf{b}|\,|\mathbf{a}| \cos(\mathbf{b},\, \mathbf{a}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$, koska kahden vektorin välisellä kulmalla tarkoitetaan aina pienempää muodostuvista kulmista.

Skalaarilla kertomisen ja skalaaritulon liitännäisyys saadaan todistettua määritelmien avulla. $(p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = |p\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(p\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = |p|\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(p(\mathbf{a},\, \mathbf{b})) = p\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Jos p on negatiivinen, kääntyy vektori vastakkaisuuntaiseksi, mutta tällöin myös kulma $(p\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ on kulman $(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$ suplementtikulma. Suplementtikulmien kosinit ovat toistensa vastaluvut, joten on joka tapauksessa voimassa $|p| \cos(p\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = p \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{b})$, jolloin $(p\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = p \cos(\mathbf{a},\, \mathbf{b}) = p\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

Yleisemmän muodon todistus etenee samoin.

Osittelulaki 1 voidaan todistaa käyttämällä skalaaritulosta skalaarikomponenttimuotoa. $|\mathbf{a}|\,(\mathrm{b_a}+\mathrm{c_a}) = |\mathbf{a}|\,\mathrm{b_a} + |\mathbf{a}|\,\mathrm{c_a}$, joka reaalilukujen osittelulain mukaisesti tiedetään todeksi.

Osittelulaki 2 seuraa edellisestä vaihdantalain perusteella. □

Lauseen 2.10 mukaisesti koordinaatiston yksikkövektoreiden skalaaritulo toisen kanssa on $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = \mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}$ =0. Lisäksi koorinaatiston yksikkövektoreiden skalaaritulo itsensä kanssa on $\mathbf{i^2} = \mathbf{j^2} = \mathbf{k^2}$ =1. Näiden sääntöjen pohjalta voidaan ilmaista kahden vektorin skalaaritulo komponenteittain.

Lause 2.12. *Vektoreiden* $\mathbf{a} = \mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}$ *ja* $\mathbf{b} = \mathrm{b_x}\mathbf{i} + \mathrm{b_y}\mathbf{j} + \mathrm{b_z}\mathbf{k}$ *skalaaritulo komponenttimuodossa saadaan seuraavasti*

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathrm{a_x b_x} + \mathrm{a_y b_y} + \mathrm{a_z b_z}$$

Tästä voidaan muokata myös kaava vektorin pituuden laskemista varten. Kun $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}}$, niin komponenttimuodossa vektorin pituus saadaan laskettua kaavalla $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathrm{a_x^2} + \mathrm{a_y^2} + \mathrm{a_z^2}}$.

Skalaaritulolla pystytään selvittämään esimerkiksi kahden vektorin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ välinen kulma seuraavalla lausekkeella, missä $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

$$\cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|}$$

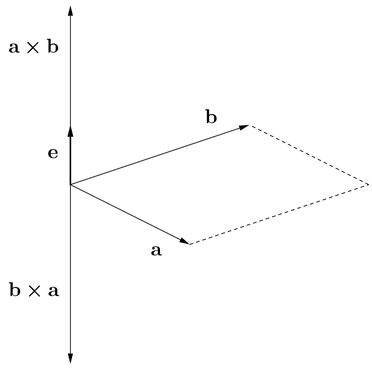
2.5 Vektoritulo

Vektoritulo on toinen vektoreille määritelty tulo ja sitä kutsutaan myös ristituloksi merkintätavasta johtuen. Vektoritulo voidaan määritellä vain avaruuden vektoreille. Nimensä mukaisesti vektoritulo on vektori.

Määritelmä 2.13. Kahden vektorin $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vektoritulo on

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{e}\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|\sin(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$$

missä $\mathbf{e}$ on yksikkövektori, joka on kohtisuorassa vektoreita $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vastaan siten, että vektorit muodostavat oikeankäden koordinaatiston (eli positiivisesta pisteestä katsottuna akselit x, y, z kiertävät positiiviseen kiertosuuntaan, eli vastapäivään). *Kahden vektorin vektoritulo on kerrottavia vektoreita kohtaan kohtisuora vektori, jonka itseisarvo on yhtä suuri kuin kerrottavista vektoreista muodostuvan suunnikkaan pinta-ala.* Kuva 2.8 selventää tilannetta.



Kuva 2.8. Vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ vektoritulot.

Vektoritulolla on seuraavia ominaisuuksia, jotka seuraavat suoraan määritelmästä.

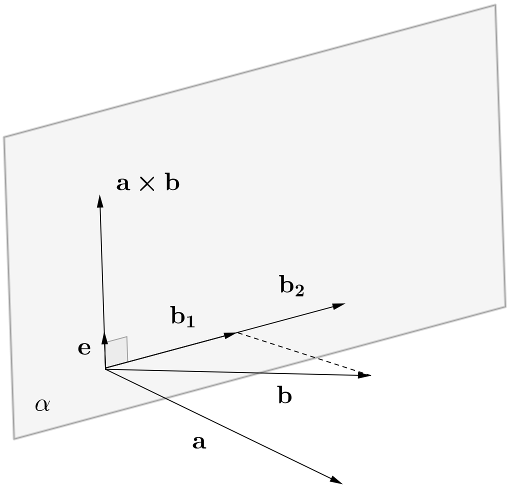
1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ silloin ja vain silloin, kun tekijävektorit ovat yhdensuuntaiset tai toinen niistä on nollavektori.

2. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

3. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

Viimeinen ominaisuus seuraa siitä, että suunnan vahtamisen jälkeen on vektoritulon suunnan vaihduttava, jotta oikean käden systeemi toteutuu. Tästä voidaan suoraan päätellä, että vaihdantalaki ei ole voimassa vektoritulolle. Myöskään liitäntälaki ei ole voimassa vektoritulolle. Tämä voidaan osoittaa esimerkiksi koordinaatiston yksikkövektoreiden avulla: $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$ mutta $(\mathbf{i} \times \mathbf{i}) \times \mathbf{j} = \mathbf{0} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$.

Geometrisesti vektoritulo $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ voidaan muodostaa projisoimalla vektori $\mathbf{b}$ vektorin $\mathbf{a}$ normaalitasolle α. Projektiovektorin $\mathbf{b_1}$ pituus $|\mathbf{b_1}| = |\mathbf{b}| \sin(\mathbf{a}, \mathbf{b})$. Kun tämä kerrotaan vektorin $\mathbf{a}$ pituudella, saadaan vektorin $\mathbf{b_2}$ pituudelle yhtälö $|\mathbf{b_2}| = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$. Kun kerrotaan tämä yksikkövektorilla $\mathbf{e}$, saadaan itse vektori $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Graafisesti tämä tarkoittaa sitä, että vektoria $\mathbf{b_2}$ käännetään 90^o vastapäivään tasolla α. Kuvassa 2.9 on havainnollistettu tilannetta.



Kuva 2.9. Vektoritulo graafisesti esitettynä.

Lause 2.14. *Vektoritulolle on voimassa seuraavat laskulait:*
Skalaarilla kertominen $(p\mathbf{a}) \times (q\mathbf{b}) = (pq)\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$
Osittelulaki 1 $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$
Osittelulaki 2 $(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} + \mathbf{c} \times \mathbf{a}$

Todistus. Skalaarilla kertominen voidaan osoittaa todeksi käsittelemällä erikseen positiiviset ja negatiiviset skalaarit. Positiivisilla luvuilla kertominen on ilmeinen, koska positiivisella luvulla kertominen ei muuta vektorin suuntaa, eikä täten myöskään vektoritulon suuntaa. Negatiivisella luvulla kertominen taas muuttaa vektorin suuntaa, mutta suunnan muuttuminen vaihtaa myös vektoritulon suuntaa kuten yllä todettiin. Tällöin negatiivinen skalaari ja vektoritulon negaatio kumoavat toisensa, joten ei ole väliä, missä vaiheessa skalaarilla kertominen tapahtuu. Vektoritulon kertominen skalaarilla tarkoittaa vektoreista muodostuvan suunnikkaan skaalaamista.

Osittelulaki 1 voidaan osoittaa todeksi aiemmin esitetyn geometrisen ajattelutavan mukaisesti (kuva 2.9). Nyt vektorin $\mathbf{a}$ normaalitasolle α projisoidaan suunnikas jonka sivut ovat $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ ja lävistäjänä $\mathbf{b} + \mathbf{c}$. Suunnikkaan sivujen (ja lävistäjän) pituudet kerrotaan vektorin $\mathbf{a}$ pituudella ja sitä kierretään tasolla α 90° vastapäivään. Näin saadaan suunnikas, jonka lävistäjä vastaa yhtälön vasenta puolta, ja sen sivut yhtälön oikeaa puolta. Näin on osoitettu osittelulaki 1 oikeaksi.

Muuttamalla osittelulaki 1 jäsenten järjestystä saadaan osittelulaki 2 myös osoitetuksi oikeaksi. □

Edellisten laskulakien perusteella saadaan koordinaatiston yksikkövektoreille seuraavat tulot.

1. $\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$
2. $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$
3. $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$

Näitä ominaisuuksia hyödyntäen, voidaan määrittää vektorirulo myös komponenttimuodossa.

Lause 2.15. *Vektoreiden* $\mathbf{a} = \mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}$ *ja* $\mathbf{b} = \mathrm{b_x}\mathbf{i} + \mathrm{b_y}\mathbf{j} + \mathrm{b_z}\mathbf{k}$ *vektoritulo voidaan kirjoittaa komponenttimuodossa*

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}) \times (\mathrm{b_x}\mathbf{i} + \mathrm{b_y}\mathbf{j} + \mathrm{b_z}\mathbf{k})$$

$$= (\mathrm{a_y b_z} - \mathrm{a_z b_y})\,\mathbf{i} + (\mathrm{a_z b_x} - \mathrm{a_x b_z})\,\mathbf{j} + (\mathrm{a_x b_y} - \mathrm{a_y b_x})$$

2.6 Skalaarikolmitulo

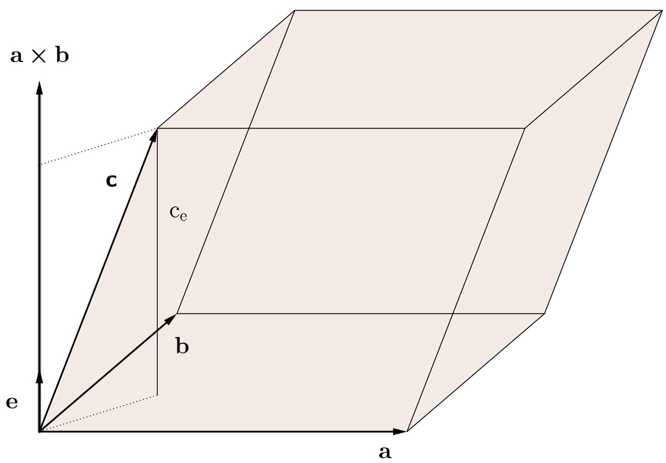
Nyt, kun on käsitelty kaikki vektoreiden peruslaskutoimitukset, syvennytään vielä hieman eri tulojen yhdistämiseen. Ensimmäisenä käsitellään skalaarikolmitulo, joka on jälleen skalaari.

Määritelmä 2.16. *Skalaarikolmitulolla* tarkoitetaan kolmen vektorin $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ tuloa, jossa on sekä skalaari- että vektoritulo: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Jotta tulo olisi mielekäs, on vektoritulo luonnollisesti muodostettava ensin, koska skalaarin ja vektorin välistä skalaarituloa ei ole määritelty. Näin ollen sulkujen käyttö ei ole välttämätöntä, vaan $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$.

Geometrisesti skalaarikolmitulon itseisarvo on sellaisen suuntaissärmiön tilavuus, jonka särminä ovat samasta pisteestä alkaen vektorit $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Kuvasta 2.10 nähdään, että suuntaissärmiön pohjasuunnikkaan ala on $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ ja sen korkeus taas on vektorin $\mathbf{c}$ skalaarikomponentti vektorille $\mathbf{e}$, joka on samansuuntainen vektorin $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ kanssa. Tällöin suuntaissärmiön tilavuudeksi saadaan määritelmien 2.2 sekä 2.9 mukaisesti $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|\,|\mathbf{c}|\,|\cos(\mathbf{c},\, \mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ eli skalaarikolmitulon itseisarvo.

Jos vektoreiden $\mathbf{a}$ ja $\mathbf{b}$ määrittämän suuntaissärmiön tahkon ja sivusärmän $\mathbf{c}$ välinen kulma on terävä, eli vektorit muodostavat oikean käden systeemin (kuten kuvassa 2.10), on skalaarikolmitulo positiivinen. Jos taas kulma on tylppä, eli vektorit muodostavat vasemman käden systeemin (tahko on suuntaissärmiön "katto" eikä pohja), on skalaarikolmitulo negatiivinen. Jos taas kyseessä on kuutio, eli tahko ja särmä ovat kohtisuorassa toisiaan kohden, on skalaarikolmitulo nolla skalaaritulon määritelmän mukaisesti.



Kuva 2.10. Skalaarikolmitulon geometrinen havainnollistus.

Lause 2.17. *Skalaarikolmitulolle on voimassa vaihdannaisuus, kun vektoreiden paikkaa vaihdetaan kiertäen eli* $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. Ei siis ole väliä, missä järjestyksessä välimerkit ovat, joten ne voidaan myös jättää merkitsemättä ja käyttää lyhyempää merkintää $[\mathbf{abc}]$. Jos järjestystä vaihdetaan muulla tavoin kuin kiertäen, muuttuu tulo negatiiviseksi, eli $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = -\mathbf{a} \times \mathbf{c} \cdot \mathbf{b}$. *Skalaarikolmitulolle on siis voimassa seuraava sääntö*

$$[\mathbf{abc}] = [\mathbf{bca}] = [\mathbf{cab}] = -[\mathbf{acb}] = -[\mathbf{bac}] = -[\mathbf{cba}]$$

Lause voidaan todeta todeksi tutkimalla, mitkä tuloista muodostavat oikean käden systeemin. Jos vektoreiden paikkaa vaihdetaan kiertäen, säilyy systeemi oikean puolisena, mutta jos järjestystä muutetaan muulla tavoin, syntyy vasemman käden systeemi, jolloin tulo on alkuperäisen vastaluku.

2.7 Vektorikolmitulo

Viimeisenä käsitellään vektorikolmitulo, jossa nimensä mukaisesti on kyseessä kolmen vektorin vektoritulo, jonka tulona on vektori.

Määritelmä 2.18. Kolmen vektorin $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ *vektorikolmitulolla* tarkoitetaan tuloa $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ tai $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

Vektoritulon yhteydessä on todettu, ettei se ole liitännäinen, joten sulkeiden käyttö vektorikolmitulossa on välttämätöntä.

Lause 2.19. *Vektorikolmitulolle on voimassa seuraava kehityskaava*
$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$.

Todistus. Tämä kehityskaava saadaan suorittamalla vektoritulot komponenteittain. Aloitetaan suorittamalla suluissa oleva vektoritulo ensimmäisenä. Tämän jälkeen kerrotaan tulo vektorilla $\mathbf{a}$ ja saadaan vektorikolmitulon komponenttimuoto. Todistusta varten on muistettava seuraavat yksikkövektoreiden ristitulot toistensa kanssa. Todistuksessa käsitellään selvyyden vuoksi vain x-akselilla olevat komponentit.

$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$, $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ ja $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$, $\mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}$, $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.

x-akselilla olevat komponentit saadaan siis kertomalla $\mathbf{j}$ ja $\mathbf{k}$ komponentit keskenään, lisäksi on muistettava, että vektorin ristitulo itsensä kanssa on $\mathbf{0}$.

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}) \times ((\mathrm{b_x}\mathbf{i} + \mathrm{b_y}\mathbf{j} + \mathrm{b_z}\mathbf{k}) \times (\mathrm{c_x}\mathbf{i} + \mathrm{c_y}\mathbf{j} + \mathrm{c_z}\mathbf{k}))$
$= (\mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}) \times ((\mathrm{b_y c_z} - \mathrm{b_z c_y})\,\mathbf{i} + (\mathrm{b_z c_x} - \mathrm{b_x c_z})\,\mathbf{j} + (\mathrm{b_x c_y} - \mathrm{b_y c_x})\,\mathbf{k})$

Siirrytään käsittelemmän vain x-akselilla olevia komponentteja.

$(\mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}) \times ((\mathrm{b_z c_x} - \mathrm{b_x c_z})\,\mathbf{j} + (\mathrm{b_x c_y} - \mathrm{b_y c_x})\,\mathbf{k})$
$= \mathrm{a_y}\,(\mathrm{b_x c_y} - \mathrm{b_y c_x})\,\mathbf{j} \times \mathbf{k} + \mathrm{a_z}\,(\mathrm{b_z c_x} - \mathrm{b_x c_z})\,\mathbf{k} \times \mathbf{j}$
$= [\mathrm{a_y}\,(\mathrm{b_x c_y} - \mathrm{b_y c_x}) - \mathrm{a_z}\,(\mathrm{b_z c_x} - \mathrm{b_x c_z})]\mathbf{i}$
$= [\mathrm{a_y b_x c_y} - \mathrm{a_y b_y c_x} - \mathrm{a_z b_z c_x} + \mathrm{a_z b_x c_z}]\,\mathbf{i}$
$= [\mathrm{a_y b_x c_y} - \mathrm{a_y b_y c_x} - \mathrm{a_z b_z c_x} + \mathrm{a_z b_x c_z} + \mathrm{a_x b_x c_x} - \mathrm{a_x b_x c_x}]\,\mathbf{i}$
$= [(\mathrm{a_x c_x} + \mathrm{a_y c_y} + \mathrm{a_z c_z})\,\mathrm{b_x} - (\mathrm{a_x b_x} + \mathrm{a_y b_y} + \mathrm{a_z b_z})\,\mathrm{c_x}]\,\mathbf{i}$
$= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathrm{b_x}\mathbf{i} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathrm{c_x}\mathbf{i}$

Tämä kuitenkin oli vain x-akselin komponentit. Jos sama suoritetaan myös y ja z-akselille ja summataan tulokset yhteen, saadaan vektorikolmitulolle haluttu muoto:

$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c}$. □

Saatu tulos voidaan myös saada seuraavaan muotoon vaihtamalla vain järjestystä, jolloin molemmilla puolilla merkit vaihtuvat.

$(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \times \mathbf{a} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b}$

2.8 Vektoreiden soveltava käyttö kouluopetuksessa

Tässä luvussa on esitelty muutamia sovelluksia vektoreille, joita esiintyy oppikirjoissakin. On tärkeää, että oppilaat kokevat vektoreiden opiskelulla olevan merkitystä ja oppia käyttämään vektoreita matemaattisena työkaluna erilaisissa yhteyksissä. Vektoreita tulee käyttöön koulussa myös fysiikan puolella, missä esimerkiksi voimien yhteydessä törmätään väistämättä vektoreihin. Matematiikassa onkin hyvä huomata, että sovelluskohteet voivat löytyä myös oman alan ulkopuolelta.

Melko yksinkertaisena esimerkkinä toimii tuuli, joka voidaan ajatella vektorina, koska sillä on tietty suunta ja suuruus. Tuulta myös esitetään sääkartoissa usein nuolella. Vektoreiden yhteenlaskua voidaan havainnollistaa esimerkiksi tuulisella säällä palloa heittämällä. Pallon kulku määräytyy (yksinkertaistettuna) heiton suunnan ja voimakkuuden lisäksi myös tuulen suunnan ja voimakkuuden mukaan. Tällöin lentorata on näiden kahden vektorin summa ja tätä voivat oppilaat kokeilla myös kotona.

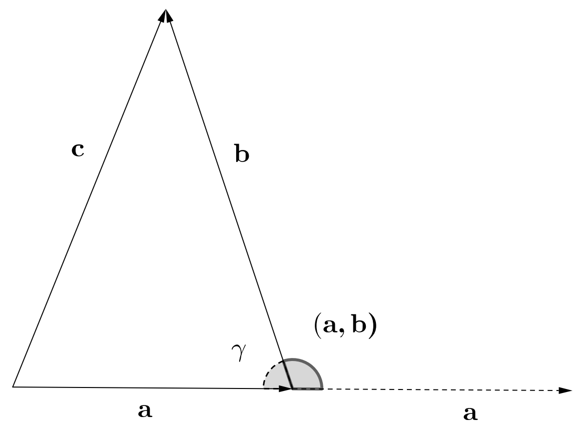
Mitä enemmän vektoreita koulussa opetetaan, sitä enemmän alkaa soveltavia käyttökohteita löytyä matematiikastakin. Esimerkiksi erilaisten geometristen todistusten tai määritystehtävien ratkaisu on yksi tapa soveltaa vektoreita. Myös fysiikan puolelta sovelluskohteita löytyy lisää, mutta ne muuttuvat monimutkaisemmiksi.

Esimerkiksi skalaarilla kertomista käytetään fysiikassa painon määrittämiseen, jolloin paino saadaan kaavalla $\mathbf{G} = m\mathbf{g}$, missä $\mathbf{g}$ on gravitaatiokentän aiheuttama putoamiskiihtyvyys. Tämän avulla on selitettävissä esimerkiksi se, miksi kuussa kaikki on kevyempää. Skalaarituloa taas voidaan hyödyntää fysiikassa esimerkiksi työn laskemiseen. Työ W saadaan näet voiman $\mathbf{F}$ ja matkan $\mathbf{s}$ skalaaritulona, $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s}$. Tämäkin havainnollistaa hyvin, kuinka kahden vektorin tulo voi olla pelkkä skalaari.

Myös vektoritulolla on useita sovelluksia esimerkiksi fysiikassa. Yksi näistä on kappaleeseen vaikuttava voiman momentti. Kun kappaleen paikkaa merkitään paikkavektorilla $\mathbf{r}$ ja siihen vaikuttavaa voimaa vektorilla $\mathbf{F}$, voidaan momentti ratkaista ristitulolla seuraavasti, $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Käytännössä tämä tarkoittaa vääntövaikutusta, joka lasketaan vääntävän voiman ja vipuvarren ristitulona. [1, s. 119]

Matematiikassa vektoreita voidaan käyttää esimerkiksi trigonometriassa apuna kaavojen johtamiseen tai geometristen ongelmien ratkaisuun ja todistamiseen. Esitellään tässä yhteydessä esimerkkeinä kosinilauseen johtaminen, yksi kolmion merkillisten pisteiden todistus sekä suuntaissärmiön tilavuuden määrittäminen.

Esimerkki 1. Kosinilauseen johtaminen.



Kuva 2.11. Kosinilauseen johtaminen.

Kuvan 2.11 mukaisesti voidaan vektori **c** ilmoittaa vektoreiden **a** ja **b** avulla. Jos saadusta yhtälöstä otetaan skalaaritulo itsensä kanssa, saadaan yhtälö, jota muokkaamalla pistetulon määritelmän mukaisesti saadaan johdettua kosinilause.

$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$.

$\mathbf{c} \cdot \mathbf{c} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$

$\mathbf{c^2} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$

$\mathbf{c^2} = \mathbf{a^2} + \mathbf{b^2} + 2\,|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$

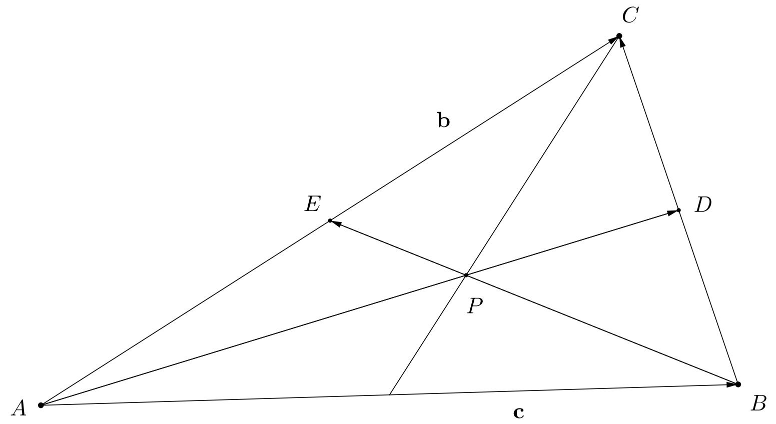
Koska pätee $(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (\pi - \gamma)$ ja $\cos(\pi - \gamma) = -\cos\gamma$, saadaan

$\mathbf{c^2} = \mathbf{a^2} + \mathbf{b^2} - 2|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}| \cos(\gamma)$

Vektorit voidaan kolmiosta korvata myös sivujen pituuksilla, jolloin saadaan yleisempi muoto.

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

Esimerkki 2. Todista, että kolmion keskijanat leikkaavat kaikki samassa pisteessä ja että tämä piste jakaa jokaisen keskijanan kärjestä lukien suhteessa 2:1.



Kuva 2.12. Kolmioiden keskijanojen leikkauspiste.

Todistus. Valitaan tutkittavaksi kaksi keskijanaa $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BE}$, joiden leikkauspisteeksi määritellään piste P. Nyt vektori $\overrightarrow{AP}$ voidaan ilmoittaa kahdella tavalla keskijanojen avulla. $\overrightarrow{AP} = s\overrightarrow{AD}$ sekä $\overrightarrow{AP} = \mathbf{c}+t\overrightarrow{BE}$

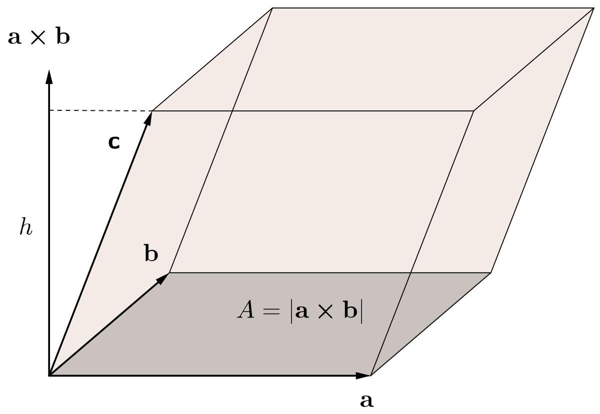
Lisäksi keskijanat $\overrightarrow{AD}$ ja $\overrightarrow{BE}$ voidaan ilmoittaa kylkivektoreiden $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ avulla. $\overrightarrow{AD} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \mathbf{c}+\frac{1}{2}\left(-\mathbf{c} + \mathbf{b}\right) = \frac{1}{2}\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$ ja $\overrightarrow{BE} = -\mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{b}$

Nyt $\overrightarrow{AP}$ saadaan ilmoitettua vektoreiden $\mathbf{b}$ ja $\mathbf{c}$ avulla. $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}s\mathbf{c} + \frac{1}{2}s\mathbf{b}$ ja $\overrightarrow{AP} = \mathbf{c}-t\mathbf{c}+\frac{1}{2}t\mathbf{b} = (1-t)\,\mathbf{c}+\frac{1}{2}t\mathbf{b}$. Ja voidaan muodostaa saaduista yhtälöistä yhtälöryhmä.

$$\begin{cases} \frac{1}{2}s = 1 - t \\ \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}t \end{cases}$$

Näistä saadaan ratkaistua, että $t = s$ ja $s = \frac{2}{3}$. Siis $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$. Samat päätelmät saadaan tehtyä kaikille keskijanoille, joten voidaan todeta, että keskijanojen leikkauspiste P on kaikkien keskijanojen leikkauspiste ja se jakaa keskijanat kärjestä lukien suhteessa 2:1. $\square$

Esimerkki 3. Suuntaissärmiön tilavuuden määrittäminen.



Kuva 2.13. Suuntaissärmiön tilavuuden määrittäminen.

Määritetään suuntaissärmiön (Kuva 2.13) tilavuus, jonka kylkinä ovat paikkavektorit $\mathbf{a} = 4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ja $\mathbf{c} = \mathbf{i}+3\mathbf{j}+2\mathbf{k}$. Suuntaissärmiön pohjan suunnikkaan ala saadaan sitä rajoittavien vektoreiden **a** ja **b** ristitulon itseisarvona. (Ks. lause 2.15.)

$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(\mathrm{a_x}\mathbf{i} + \mathrm{a_y}\mathbf{j} + \mathrm{a_z}\mathbf{k}) \times (\mathrm{b_x}\mathbf{i} + \mathrm{b_y}\mathbf{j} + \mathrm{b_z}\mathbf{k})|$

$= |(\mathrm{a_y b_z} - \mathrm{a_z b_y})\,\mathbf{i} + (\mathrm{a_z b_x} - \mathrm{a_x b_z})\,\mathbf{j} + (\mathrm{a_x b_y} - \mathrm{a_y b_x})\,\mathbf{k}|.$

Eli $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |(0\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) \times (5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 1\mathbf{k})|$

$= |(4 \cdot 2 - 2 \cdot 2)\,\mathbf{i} + (2 \cdot 5 - 0 \cdot 1)\,\mathbf{j} + (0 \cdot 2 - 4 \cdot 5)\,\mathbf{k}|$

$= |4\mathbf{i} + 10\mathbf{j} - 20\mathbf{k}|$.

Suuntaissärmiön tilavuus saadaan aiemmin esitellyllä tavalla (ks. luku 2.6) skalaarikolmitulolla tutun tilavuuden kaavan $V = Ah$ mukaisesti.

Suuntaissärmiön tilavuus saadaan skalaaritulosta vektorin **c** ja jo lasketun ristitulon $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ välillä, kun skalaaritulo otetaan komponenteittain (Lause 2.12, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathrm{a_x b_x} + \mathrm{a_y b_y} + \mathrm{a_z b_z}$).

$\mathbf{c} \cdot \mathbf{a} \times \mathbf{b} = 1{\cdot}4{+}3{\cdot}10{+}2{\cdot}(-20) = -6$ ja tämän itseisarvo on suuntaissärmiön tilavuus eli $V = |-6| = 6$.

3 Vektorialgebran opetus kouluissa

Tässä tutkielmassa on tutkittu Suomessa julkaistuja kansallisia peruskoulun ja lukion opetussuunnitelmia ja opetussuunnitelman perusteita 1970-luvulta tähän päivään. Kaikista julkaisuista käytetään jatkossa selkeyden vuoksi termiä opetussuunnitelma. Julkaisuista on tutkittu, missä laajuudessa ne asettavat vektorialgebraa opetettavaksi kouluihin. Lisäksi jokaisen julkaisun vaikutusajalta on valittu oppikirjoja, joissa vektorialgebraa tulisi opetussuunnitelman mukaisesti käsitellä sekä kirjoja joissa vektoreita voitaisiin hyödyntää. Oppikirjoista on tutkittu, kuinka opetussuunnitelman asettamat tavoitteet ovat oppikirjoissa näkyneet. Jokainen opetussuunnitelma on käsitelty omassa alaluvussaan, jossa lisäksi on käsitelty mahdolliset oppikirjat kyseiseltä ajalta. Taustatiedoksi tutkitaan myös oppikoulujen ajalta edellisiä oppiennätyksiä sekä perehdytään muutamiin kirjoihinn näiden ajalta.

Peruskoulu-uudistuksen lisäksi Suomen koulujärjestelmässä on tapahtunut myös pienempiä muutoksia tutkittavalla ajanjaksolla. Peruskoulun ensimmäisessä opetussuunnitelmassa (1970 [18]) matematiikassa oli vielä käytössä tasokurssit eli seitsemännellä luokalla kaksi eritasoista kurssia ja kahdeksannella sekä yhdeksännellä kolme eritasoista kurssia. Tämän jälkeen tasokursseista on ainakin opetussuunnitelmien tasolla luovuttu peruskoulussa. Lukiossa pidempi ja lyhyempi oppimäärä ovat aina matematiikassa olleet eroteltuina toisistaan. Tutkittaessa kaikki eritasoiset kurssit on otettu huomioon.

Opetettavia sisältöjä on verrattu yllä esiteltyihin vektorialgebran osa-alueisiin. *Peruskäsitteistöllä* tarkoitetaan luvussa 2.1 käsiteltyjä käsitteitä kuten yksikkövektori, nollavektori sekä vektoreiden yhdensuuntaisuus, pois lukien suuntajanojen ekvivalenttisuus eli määritelmä 2.1. *Peruslaskutoimituksilla* taas tarkoitetaan luvun 2.3 asioita, eli vektoreiden yhteen- ja vähennyslaskua sekä skalaarilla kertomista. Jos vektoreita ylipäätään opetetaan, tulevat nämä asiat yleensä käsitellyiksi. Myös pidemmälle menevissä asioissa viitataan aiemmin käsiteltyihin sisältöihin, vaikka oppikirjoissa asiat käsitellään usein hieman esitettyä suoraviivaisemmin. Jatkossa vektorialgebrasta käytetään yksinkertaisempaa muotoa vektorit, koska vektoreista ei käsitellä muuta koulussa.

3.1 Katsaus oppiennätyksiin ennen vuotta 1970

Vuonna 1941 vahvistettiin valtion oppikouluihin uudet oppiennätykset [39], joissa ei ole mainintaa vektoreista oppisisällöissä. Oppiennätyksissä painotetaan periaatetta, että opetettavia sisältöjä ei pidä olla liikaa, jotta käsiteltävät asiat voidaan oikeasti ymmärtää. Yleisissä matematiikan opetuksen tavoitteissa mainitaan, että lukioluokkien opetuksessa tulee pitää silmällä jatko-opintoja. Tarkoitus oli valmistaa opiskelijoita mahdollisimman hyvin jatko-opintoihin, mutta ilmeisesti jatko-opinnoissa ei vektoreiden hallintaa vaadittu. Oppiennätyksissä opetettavat sisällöt ovat yksityiskohtaisesti avattuja, joten voidaan todeta, ettei vektoreita oppiennätysten mukaan tarvinnut opettaa oppikouluissa vuosien 1941 ja 1960 välillä.

Kouluhallitus vahvisti uudet oppikoulun oppiennätykset vuonna 1960 [20], [21]. Nämä olivat viimeiset oppiennätykset ennen peruskoulu-uudistusta Suomessa. Oppiennätyksissä on tarkasti selostettu kaikki opetettavat aiheet vuosiluokittain ja annettu metodisia ohjeita eri aihealueiden opettamiseen. Mitään mainintaa vektoreista niissä ei kuitenkaan ole.

Lisäksi tutkittiin vertailun vuoksi kaksi ennen peruskoulu-uudistusta käytettyä lukion oppikirjaa. Lukioissa opetus ei vielä tällöin ollut muuttunut kurssipohjaiseksi ja kirjat olivatkin aihealueittain tehtyjä ja erosivat nykyisistä oppikirjoista merkittävästi jo ulkoasultaan. Kallion Geometria 2, lukion oppimäärä [16] sekä Väisälän Algebran oppi- ja esimerkkikirja lukion pidempään kurssiin [40] olivat molemmat saatavilla useista eri lähteistä, eli ovat olleet ilmeisesti laajasti käytössä. Kummastakaan näistä ei kuitenkaan löydetty minkäänlaista mainintaa vektoreista, joten ainakaan matematiikassa vektorit eivät ole olleet edustettuina. Fysiikassa on toki voitu opettaa vektoreista tarpeelliset asiat fysiikkaa varten. Fysiikan oppikirjoihin tai opetussuunnitelmiin ei tässä tutkielmassa kuitenkaan ole perehdytty.

3.2 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1970

Vuoden 1970 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa [18] vektorit ovat osana geometrian opetusta. Geometrian osa-alueena on mainittu vektorigeometria kahdeksannelle ja yhdeksännelle luokalle. Tarkemmin vektorit mainitaan ainoastaan yhdeksännen luokan keskikurssilla sekä laajalla kurssilla ja näissäkin melko lyhyesti. Tämä on kuitenkin tällä hetkellä tuorein maininta vektoreista Suomen peruskoulun opetussuunnitelmissa.

Opetussuunnitelman lisäksi opettajille on julkaistu POPS–70 oppaita kuhunkin oppiaineeseen, joissa annetaan konkreettisia esimerkkejä opetussuunnitelman toteuttamiseen. Matematiikan oppaassa [22] vektoreiden opetus nostetaan esille jo 8. kouluvuoden keski- ja laajalla kurssilla vektoreiden yhteenlaskulla sekä 9. kouluvuoden keski- ja laajalla kurssilla laajemmin otsikolla "Vektoreista". Lisäksi 9. kouluvuoden syksyllä on yleiskurssilla maininta "Vektorilaskuja". Opetussuunnitelman voidaan todeta jättäneen melko lailla tulkinnan varaa opetuksen järjestämisestä, koska opetussuunnitelmassa ja siitä laaditussa oppaassa eroja on merkittävästi. Kuitenkin vektoreita on jossain vaiheessa peruskoulua opetettu ainakin kahdelle vaativimmalle tasokurssille.

1970-luvun alussa matematiikan opetukseen Suomessa vaikutti myös Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietintö [38], joka valmistui 1967 . Uudistuskomitea on halunnut nostaa kouluopetukseen niin kutsuttua uutta matematiikkaa, joka toi opetukseen muun muassa joukko-oppin. Mietinnössä on esitetty sisältö kaikille tarkoitettavasta matematiikan opetuksesta peruskouluun sekä lukioon. Tässä sisällössä vektorit nousevat ensimmäisen kerran esille kahdeksannella luokalla, jolloin opetettavaksi esitetään tasovektoreita. Tarkemmin vektoreista mainitaan käsiteltäväksi peruslaskutoimitukset sekä koordinaattiesitys (ks. luku 2.2). Mietinnön suorat vaikutukset eivät olleet kovin kauaskantoisia, mutta näkyivät oppikirjoissa 70-luvulla. Myöhemmin julkaistuissa oppikirjoissa ei enää ole mainintoja mietinnöstä, eivätkä sen nostamat asiat näy opetettavissa sisällöissä.

3.2.1 Opetussuunnitelman toteutuminen oppikirjoissa

70-luvun vaihtelevat ohjeet eri lähteissä näkyvät myös oppikirjoissa, joilla ei ole näyttänyt olevan selkeää linjaa, mitä ohjeistusta noudatetaan. Ohjeiden vaihtelevuudesta johtuen tutkittiin tässä yhteydessä laajemmin oppikirjoja, jotta saataisiin parempi käsitys, kuinka paljon vektoreita oikeastaan on opetettu peruskoulun aikana.

Esimerkiksi Matematiikka -sarjan kirjassa 5 [15] käsiteltiin vektoreita. Tässä kokeiluperuskoulun viidennelle luokalle tarkoitetussa kirjassa on käsitelty joukko-opin alkeita. Negatiivisten lukujen kohdalla käsitellään lukusuoraa ensin janojen avulla, mutta seuraavaksi janoille annetaan suunta ja siirrytään puhumaan vektoreista. Tässä yhteydessä vektoreista käsitellään yhtäsuuruus, nollavektori, yhteenlasku ja vähennyslasku. Tarkoituksena on korvata luonnollisten lukujen yhteen- ja vähennyslasku vektoreiden yhteen- ja vähennyslaskulla. Vektorit tarjoavatkin toimivalta vaikuttavan tavan havainnollistaa negatiivisilla luvuilla laskemista.

Ylempien luokkien kirjoista kirjoista tutkittiin kirjasarjaa Matematiikan tiedot. Näistä ensimmäisessä, seitsemännelle luokalle tarkoitetussa kirjassa [41] puhutaan suuntajanoista kaikille tasokursseille tarkoitetussa Yhdensuuntaisuus ja kierto -kappaleessa. Tässä yhteydessä käsitellään nollajana, yhteenlasku ja sen vaihdantalaki ja liitäntälaki sekä luonnollisella luvulla kertominen. Suoranaisesti ei puhuta edes vektoreista, koska käsittelyssä ovat vain yhdensuuntaiset suuntajanat, mutta voidaan ajatella tässä pohjustettavan vektoreiden käsittelyä. Kirja ei oleta vektoreiden hallitsemista ennestään.

Lisäksi Matematiikan tiedot 7 -kirjassa on Tason vektorit -kappale, jota ei ole tarkoitus käsitellä suppealla kurssilla. Tässä kappaleessa vektoreita käsitellään melko täsmällisesti. Käsiteltävinä aiheina ovat peruskäsitteet sekä -laskutoimitukset laskulakeineen. Lisäksi käsitellään vektorin komponentit, paikkavektori, kantavektorit sekä koordinaatit.

Matematiikan tiedot 8 -kirjan [42] kaikille tarkoitetussa Tason vektorit kappaleessa käsitellään miltei samoja asioita kuin edellisen kirjan vastaavassa luvussa. Asioiden käsittelytapa on kuitenkin paljon täsmällisempi ja lauseita todistetaan enemmän. Lisäksi vektoreiden yhteydessä käsitellään erilaisia sovelluksia, joissa vektoreita voidaan käyttää, sekä lineaarifunktio paikkavektorin avulla. Myöhemmin kirjassa käytetään vektoreita muun muassa yhdenmuotoisuuskuvausten ominaisuuksia todistettaessa.

Matematiikan tiedot 9 -kirjassa [43] vektoreita käytetään hyödyksi laajalle kurssille tarkoitetussa kappaleessa Reaalilukujen merkitys. Kappaleessa käsitellään lähinnä vektorin pituutta ja sen avulla muun muassa pisteiden etäisyyksiä toisistaan. Kaikille tarkoitetuissa kappaleissa Avaruusgeometrian alkeet ja Avaruuskuvista käsitellään enemmän vektoreita kolmiulotteisessa avaruudessa. Kappaleissa käsitellään muun muassa kolmiulotteisen avaruuden kantavektorit, kahden tason välinen kulma, paikkavektori sekä kavaljeeriperspektiivi. Kokonaan uusia asioita vektoreihin ei näissä kappaleissa juurikaan tule, vaan käsittelyä lähinnä laajennetaan.

1970-luvulla peruskoulussa vektoreista käsiteltiin siis pituus, yhteenlasku sekä skalaarilla kertominen. Annetuissa opetussuunnitelmissa ja muissa ohjeissa eroavaisuuksia oli melkoisesti, mutta ainakin tutkittuja kirjoja käyttäneet koulut ovat opettaneet vektoreita peruslaskutoimituksiin asti kaikille oppilaille jo kahdeksannella luokalla. Lisäksi yhdeksännellä luokalla opetettiin kaikille vektoreita kolmessa ulottuvuudessa. Kaikkien oppilaiden saamat sisällöt olivat siis poikkeuksellisen laajat verrattuna menneisiin tai tuleviin vuosikymmeniin. Joissain kouluissa on vektoreita pohjustettu kenties jo viidennellä luokalla. Vektoreiden käsittelyn lisäksi oppikirjoissa vektoreita käytettiin erilaisissa sovelluksissa ja havainnollistuksissa, joten vektoreista on saanut hyvin laajat tiedot jo peruskoulussa 1970-luvulla.

3.3 Lukion opetussuunnitelma 1973

Peruskoulu-uudistuksen myötä lukioille tuli olla oma opetussuunnitelmansa. Ensimmäinen lukion opetussuunnitelma julkaistiin vuonna 1973. Tämän lisäksi vuonna 1977 julkaistiin lukion opetussuunnitelmatoimikunnan mietintö II [19], jossa on muokattu opetussuunnitelmaa peruskouluun siirtymisen tuomien muutosten mukaisesti. Kaikilla peruskoulun käyneillä tuli olla mahdollisuus lukiokoulutukseen ja näin ollen lukiossa ei voitu olettaa tietyn tasokurssin mukaista osaamista peruskoulun jälkeen. Vuoden 1977 mietintö on kuitenkin sisällöltään hyvin samankaltainen kuin vuonna 1981 julkaistu kurssimuotoinen oppimäärä matematiikalle [24] sekä 1985 lukion opetussuunnitelman perusteet [25]. Tästä syystä ei ole merkityksellistä käsitellä kaikkia erikseen, vaan voidaan keskittyä tässä vuoden 1973 opetussuunnitelmaan ja myöhemmin vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteisiin. Vuonna 1967 valmistunut Pohjoismaisen matematiikan opetuksen uudistuskomitean mietintö [38] sisälsi myös ehdotuksen lukion opetussisällöiksi, mutta nämä eivät juuri näy lukion oppikirjoissa eivätkä eroa virallisesta opetussuunnitelmasta.

Vuoden 1973 lukion matematiikan opetussuunnitelmassa [23] matematiikan opetuksen yleiseksi tavoitteeksi esitellään mahdollisimman perusteellinen valmistavuus erilaisiin jatko-opintoihin sekä harrastuneisuuden herättäminen. Lisäksi eritellään, että pitkällä kurssilla pidetään lähinnä silmällä matemaattis-luonnontieteellisiä sekä teknisiä jatko-opintoja, kun taas lyhyellä kurssilla tähdätään enemmän humanistisiin, yhteiskunnallisiin sekä palvelu- ja kauppa-alan jatko-opintoihin.

Suurimpana muutoksena vanhoihin oppiennätyksiin mainitaan geometrisen materiaalin käsittely, jossa siirrytään suurelta osin vektoreiden käyttöön. Lisäksi Eukleideen mukaiselle systematiikalle perustuvasta esityksestä on luovuttu. Vektoreiden tulisi siis näkyä merkittävästi tässä opetussuunnitelmassa. Myös ensimmäisen vuoden yleisissä tavoitteissa painotetaan, että on käytettävä aikaa aiemmin opittujen tietojen ja taitojen syventämiseen ja varmistamiseen. Etenkin vektoreiden sisäistäminen nostetaan esille, jos opiskelija ei ole opiskellut peruskoulun uusien opetussuunnitelmien mukaisesti.

Lyhyellä kurssilla vektoreita käsitellään vain ensimmäisenä vuonna, jolloin aiheina ovat peruskäsitteiden kertaus sekä peruslaskutoimitukset. Lisäksi käsitellään koordinaattiesitys sekä skalaaritulo. Ainakin skalaaritulo on uutta asiaa lukiossa ja se opetetaan kaikille. Melko laajat perustiedot ovat sisältyneet jo lyhyen kurssin sisältöihin.

Myös pitkällä matematiikan kurssilla on ensimmäiselle vuodelle merkitty opetusjakso vektoreista, joka on sisällöltään hyvin samankaltainen kuin lyhyen kurssin vastaava opetusjakso. Aiheiden käsittelyssä on kuitenkin pieniä eroja, esimerkiksi koordinaattiesityksen kohdalla mainitaan vektorikomponentin ja skalaarikomponentin erottelu, skalaaritulon kohdalla laskulait sekä kahden koordinaattimuodossa olevan vektorin skalaaritulon laskeminen. Lisäksi syventävään materiaaliin on merkitty ajan salliessa käsiteltäväksi aiheeksi vektoritulo. Vektoreista löytyy maininta myös suoran yhtälöiden yhteydessä, missä mainitaan vektorimuotoisten yhtälöiden käsittely sekä kolmannen vuoden kertausosiossa mainitaan vektoreiden kertaus käyttäen kolmiulotteisia vektoreita. Pitkällä matematiikan kurssilla käsiteltäviä asioita tulee hieman enemmän ja hieman syvällisemmin kuin lyhyellä kurssilla. Merkittävää eroa ei kuitenkaan lyhyen ja pitkän kurssin välillä ole vektoreiden opetuksessa.

3.3.1 Opetussuunnitelman toteutuminen oppikirjoissa

Lyhyen kurssin oppikirjassa Lukion matematiikka 1, lyhyt kurssi [28] vektoreiden käsittely aloitetaan alusta ja käsittely aloitetaan suuntajanasta sekä vektoreiden ominaisuuksista. Seuraavaksi käsitellään peruslaskutoimitukset sekä skalaaritulo lauseen 2.10 mukaisesti. Lopuksi käsitellään vielä vektorin koordinaatit vektori- ja skalaarikomponenttien avulla. Eteneminen kirjassa on melko ripeää, joten kenties oletus on, että vektorit ovat jossain määrin tuttuja entuudestaan. Muissa sarjan kirjoissa Lukion matematiikka 2 ja 3, lyhyt kurssi [29, 27] vektoreita ei käsitellä, eikä niitä käytetä. Kirjasarja vastaa hyvin opetussuunnitelmassa esitettyjä sisältöjä.

Lukion matematiikka kirjasarjan pitkän kurssin ensimmäiselle vuodelle tarkoitetussa teoksessa Lukion matematiikka 1, pitkä kurssi, [12] käsitellään vektoreita useassa luvussa. Aluksi vektoreihin perehdytään Tason vektorit -luvussa, jossa määritellään vektorit suuntajanojen kautta, käsitellään vektoreiden perusominaisuudet sekä -laskutoimitukset laskulakeineen, vektorin komponentit sekä joitakin geometrisia sovelluksia. Vektoreihin perehdytään lisää trigonometrian yhteydessä, jolloin käsitellään skalaaritulo lauseen 2.10 mukaisesti sekä skalaaritulon laskulait. Lisäksi vektoreita käytetään tämän jälkeen hyödyksi erilaisten lauseiden, kuten kosinilauseen, johtamisessa (ks. esimerkki 1). Analyyttisen geometrian yhteydessä rinnastetaan piste ja paikkavektori (ks. luku 2.1) sekä muodostetaan suoran vektorimuotoinen yhtälö. Lisäksi vektoreita käytetään jälleen apuna janan keskipisteen kaavan johdossa, kahden suoran välisen kulman sekä pisteen ja suoran välisen etäisyyden määrittelemisessä.

Lukion matematiikka 2, pitkä kurssi [13] teoksessa vektoreita ei ole käsitelty eikä niitä ole käytetty. Viimeisen vuosiluokan kirjassa, Lukion matematiikka 3, pitkä kurssi [14], vektoreita käsitellään yhdessä luvussa, joka on vektorilaskentaa. Tällöin käsittelyyn otetaan kolmiulotteinen avaruus ja sen vektorit. Lähinnä luvussa käsitellään jo aiemmin opittuja asioita kolmiulotteiseen avaruuteen sovellettuna, mutta lopuksi käsitellään uutena asiana vektoritulo määritelmineen (ks. määritelmä 2.13) ja laskulakeineen sekä suuntaissärmiön tilavuuden määritys (ks. esimerkki 3).

1973 vuoden lukion opetussuunnitelmassa vektorit ovat melko laajasti esillä sekä lyhyellä että pitkällä matematiikan kurssilla, mikä onkin luonnollista, kun vektoreita on käsitelty myös peruskoulussa. Tutkitussa kirjasarjassa vektoreita on käsitelty melko perusteellisesti ja erityisesti vektoreita on liitetty muihinkin opetettaviin asioihin ja hyödynnetty esimerkiksi kaavojen johtamisessa. Lisäksi esitetyt lauseet ovat joko perusteltuja tai todistettuja ja käsittely on yleisesti täsmällistä ja joukko-oppiin pohjautuvaa. Kyseinen opetussuunnitelma ja oppikirjat eroavat tulevista, sillä ne eivät ole kurssimuotoisia. Tämä näkyy etenkin oppikirjoissa, jotka ovat vuosiluokittain tehtyjä, ja tästä syystä käsiteltävien asioiden integroiminen on helpompaa ja luonnollisempaa.

3.4 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985

Vuoden 1985 peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa [26] ei matematiikan oppiaineksessa mainita vektoreita opetettavissa aiheissa. Ainoastaan kohdassa ”Valinnaiset ja syventävät opinnot” ehdotetaan, että 15–20 % oppitunneista yhdeksännellä luokalla käytettäisiin valinnaisiin ja syventäviin opintoihin, joihin voisi sisältyä esimerkiksi vektorilaskentaa. Käytännössä vektoreiden opetus peruskoulussa on luultavimmin jäänyt hyvin vähäiseksi, koska näissä opinnoissa saatettiin käyttää aikaa myös vanhojen asioiden kertaamiseen tai jo opittujen asioiden syventämiseen sekä moniin muihin syventäviin aiheisiin. Jos vektoreita joissain kouluissa onkin käsitelty, on tuntimäärä luultavasti jäänyt melko vähäiseksi eikä vektoreita oli kovin syvällisesti ehditty käsitellä.

3.5 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985

Kouluhallitus julkaisi vuonna 1981 Lukion kurssimuotoisen oppimäärän ja oppimismääräsuunnitelman kaikille opetettaville aineille, jotka astuivat voimaan syksyllä 1982. Vuonna 1983 säädettiin uusi lukiolaki, jossa opetussuunnitelman laatiminen tuli koulun ylläpitäjän velvollisuudeksi, kun taas kouluhallituksen tuli tarjota kunnan opetussuunnitelman laadintaa ja oppiaineiden opetusta koskevat ohjeet ja päättää valtakunnallisista oppimääristä. Tämän seurauksena vuonna 1985 julkaistiin Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985, joissa määritellään laajemmin lukion tehtävää eikä ainoastaan oppiaineiden oppimääriä. [25]

Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa [25] ja vuoden 1981 oppimäärässä [24] matematiikan sisällöt ovat lähes muuttumattomat sanamuotoja lukuun ottamatta, joten tässä yhteydessä vuoden 1981 oppimäärä jätetään käsittelemättä. Vuoteen 1982 mennessä tehdyt oppimateriaalit säilyivät käytössä aina seuraavaan 1994 lukion opetussuunnitelman perusteisiin asti [34], joten ajanjakso voidaan nähdä oppikirjojen osalta yhtenäisenä, vaikka opetussuunnitelmana käsitelläänkin 1985 opetussuunnitelman perusteita. Tässä opetussuunnitelman perusteissa kurssin pituudeksi on määritelty 38 oppituntia, mikä onkin pysynyt samana vuoden 2004 opetussuunnitelmaan asti.

Vuoden 1985 opetussuunnitelman perusteissa yleisellä matematiikalla tähdätään lähinnä humanistisiin, yhteiskuntatieteellisiin sekä palvelu- ja kauppa-alan jatko-opintoihin, kun taas laajalla oppimäärällä tähdätään matemaattis-luonnontieteellisiin sekä teknisiin jatko-opintoihin. Jatko-opintotavoitteet ovat samat kuin edellisessäkin opetussuunnitelmassa. Yleistavoitteet harrastuneisuuden herättämisestä sekä matemaattisen yleissivistyksen saavuttamisesta ovat yhteiset molemmille oppimäärille.

Yleisessä oppimäärässä yleisten tavoitteiden kohdalla mainitaan vektoreiden peruslaskutoimitukset laskuteknisten valmiuksien kohdalla. Yleisessä oppimäärässä vektoreita käsitellään yhdellä kurssilla, jonka aiheina on geometrian kertausta, trigonometriaa sekä vektoreita. Vektoreista käsiteltävinä aiheina mainitaan peruskäsitteistö, peruslaskutoimitukset sekä näiden laskulait ja vektoreiden komponenttiesitys. Lisäksi mainitaan skalaaritulo ylimääräisenä asiana, joka voidaan käsitellä ajan ja kiinnostuksen mukaan. Kurssisisällöissä on myös maininta geometrisista sovelluksista, mutta ei tule selväksi, onko näissä tarkoitus käyttää vektoreita.

Myös laajan oppimäärän kohdalla mainitaan yleisissä tavoitteissa vektoreiden peruslaskutoimitusten hallinta. Vektoreita käsitellään laajassa oppimäärässä kahdella kurssilla. Ensimmäisellä kurssilla aiheena on vektoreiden lisäksi geometria. Tavoitteena tällä kurssilla on hallita vektoriopin ja tasogeometrian peruskäsitteet sekä tutustua vektoreiden käyttöön todistustehtävissä ja geometriassa. Sisällöissä eritellään tarkemmin vektoreista käsiteltäväksi peruskäsitteistö, peruslaskutoimitukset laskulakeineen sekä skalaaritulon määritelmä ja laskulait. Lisäksi syventävänä materiaalina tulisi käydä koordinaattiesitys, vektoriyhtälöt sekä vektori- ja skalaarikomponentti.

Toisella vektoreita käsittelevällä kurssilla on aiheena vektorilaskennan täydennyksen lisäksi avaruusgeometria ja kompleksiluvut. Kurssin tarkoituksena on syventää vektorilaskennan tuntemusta ja laajentaa tuntemusta myös kolmiulotteisen avaruuden vektoreihin. Yhdistelmänä kurssin sisältö on hyvin mielenkiintoinen ja tarjoaa valtavasti mahdollisuuksia vektoreiden soveltamiseen. Opetussuunniltemasta ei kuitenkaan nähdä, kuinka aiheita hyödynnetään kurssilla. Sisältönä vektoreiden osalta kurssilla mainitaan kolmiulotteinen vektoriavaruus sekä ylimääräisenä asiana vektoritulo ja skalaarikolmitulo, joita voidaan käsitellä ajan ja kiinnostuksen mukaan.

Erona yleisen ja laajan oppimäärän välillä on lähinnä skalaaritulo sekä kolmiulotteisen avaruuden vektorit, jotka tulevat vain laajassa oppimäärässä. Perustiedot vektoreista tulevat kuitenkin kaikille lukion opiskelijoille ja etenkin laajassa oppimäärässä mennään melko haastaviinkin asioihin. Tämä on viimeisin lukion opetussuunnitelma, jonka mukaan näin tapahtuu.

Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteet antaa selkeät erittelyt, mitä sisältöjä vektoreista tulisi kullakin kurssilla käsitellä, joten epäselvyyttä ei oppikirjojen tekijöillä tai opetuksen järjestäjillä luultavasti ollut. Myös oppimäärien yleiset tavoitteet on opetussuunnitelmassa eritelty tarkasti.

3.5.1 Opetussuunnitelman toteutuminen oppikirjoissa

Yleisen oppimäärän oppikirjassa Akseli 1. [44] tason vektoreita käsitellään noin puolen kurssin verran. Toinen puolikas kurssista on trigonometriaa. Vektoreiden käsittely aloitetaan yhteydestä fysiikkaan sekä suuntajanan käsitteestä ja ominaisuuksista, jotka myöhemmin laajennetaan vektoreihin. Aluksi käsitellään peruslaskutoimitukset laskulakeineen ja lopuksi pakollisena materiaalina vielä vektorit tason koordinaatistossa, komponenttimuoto sekä vektorin pituus. Eriyttävänä materiaalina kirjassa on esitelty vektoreiden skalaaritulo ja sen laskulait, vektoreiden välinen kulma sekä skalaaritulon koordinaattiesitys (ks. lause 2.12), jotka voidaan käsitellä ajan ja kiinnostuksen mukaan.

Sarjan toisessa osassa Akseli 2. yleinen oppimäärä [45] vektoreita ei käsitellä eikä käytetä lainkaan. Sarjan viimeisessä osassa Akseli 3. yleinen oppimäärä [46] on kertausosio, jossa vektoreita kerrataan lähinnä tehtävien muodossa. Mitään uutta vektoreista ei käsitellä tässäkään kirjassa, vaan yleisen oppimäärän vektorit tulee käsitellyksi ensimmäisen vuoden aikana, mikä vastaa myös opetussuunnitelmaa. Saman kurssin sisältöjä, avaruusgeometria ja kompleksiluvut, ei kuitenkaan juuri sovelleta vektoreiden kanssa.

Laajan oppimäärän kirjoista perehdyttiin Uuden lukion matematiikka, laaja oppimäärä -sarjaan. Sarjan ensimmäisessä kirjassa Uuden lukion matematiikka 1, laaja oppimäärä [30], käsitellään vektoreiden perusteita yhdellä kurssilla. Käsittely aloitetaan erilaisista suureista ja suuntajanoista, joista päädytään vektoreihin ja niiden peruskäsitteisiin. Seuraavaksi kurssilla käsitellään peruslaskutoimitukset laskulakeineen sekä vektorin komponentit yleisesti ja koordinaatistossa. Lopuksi kurssilla käsitellään vielä geometrisia sovelluksia, kuten todistuksia, joissa voidaan hyödyntää vektoreita sekä skalaaritulo ja sen laskulait melko perusteellisesti. Lauseiden todistuksia ei kirjassa kuitenkaan ole esitetty, eikä niitä juuri käydä läpi tehtävissäkään.

Sarjan toisessa kirjassa Uuden lukion matematiikka 2, laaja oppimäärä [31], vektoreita ei käsitellä tai käytetä lainkaan. Sarjan kolmannessa kirjassa Uuden lukion matematiikka 3, laaja oppimäärä [32], vektoreihin palataan nopeasti, kun vektorit laajennetaan tasolta avaruuteen. Tässä yhteydessä käydään melko ripeästi läpi kaikki aiemmin käydyt asiat uudelleen kolmessa ulottuvuudessa. Ylikurssiaineena, joita voidaan ajan ja kiinnostuksen puitteissa käsitellä, kirjassa on vielä käsitelty vektoritulo, sen laskulait sekä geometrisia sovelluksia ja skalaarikolmitulo suuntaissärmiön tilavuuden laskemisen kautta (ks. esimerkki 3).

Vuoden 1985 lukion opetussuunnitelman perusteiden aikaisissa oppikirjoissa vektoreita käsitellään melko yksityiskohtaisesti ja laajasti sekä yleisessä, että laajassa oppimäärässä. Käsitellyt oppikirjat vastasivat hyvin opetussuunnitelmaa ja etenkin laajan oppimäärän kirjoissa vektoreita käytetään myös soveltavasti. Lauseiden perusteluita tai todistuksia ei kuitenkaan ole esitetty. Tämän opetussuunnitelman aikana oppikirjat olivat edelleen lukuvuodeksi tarkoitettuja eikä kurssikohtaisia, joten vektoreiden liittäminen muihin aiheisiin on yksinkertaisempaa kuin myöhemmin. Jonkin verran tällaisia sovelluksia esiintyikin, mutta vähän verrattuna edellisen opetussuunnitelman ajalta käsiteltyihin oppikirjoihin.

3.6 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994

Vuonna 1994 opetushallituksen vahvistamassa perusopetuksen opetussuunnitelman perusteissa [33] ei ole mainintaa vektoreista opetettavissa sisällöissä. Näin ollen vektoreita ei ole tarvinnut opettaa peruskoulussa tämän opetussuunnitelman perusteiden aikana. Joissakin kouluissa on toki voinut olla valinnaisia matematiikan opintoja, joissa vektoreita on käsitelty.

3.7 Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994

Vuonna 1994 opetushallituksen vahvistamassa lukion opetussuunnitelman perusteissa [34] pitkän matematiikan opetuksen tehtäväksi kerrotaan muun muassa ”tarjota opiskelijoille mahdollisuudet hankkia sellaiset tiedot ja taidot, joita tarvitaan erityisesti matematiikan, luonnontieteiden ja tekniikan ammatillisissa ja korkeakouluopinnoissa.” Lyhyessä matematiikassa taas tähdätään muun muassa ”yleisen jatko-opintovalmiuksien hankkimiseen lähinnä humanistisia, yhteiskuntatieteellisiä ja kaupallisia aloja varten.”

Lyhyessä matematiikassa vektoreita ei mainita minkään kurssin sisällöissä. Ainoastaan ehdotuksissa mahdollisten koulukohtaisten syventävien kurssien sisällöiksi mainitaan vektorit yhtenä aiheena. Vuoden 1994 lukion opetussuunnitelman mukaan jää siis kaikki lyhyen matematiikan opiskelijat vaille vektoreiden opetusta.

Pitkässä matematiikassa vektoreita käsitellään yhdellä kurssilla ”Trigonometria ja vektorit”. Vektoreiden osalta sisällöksi kerrotaan vektorin käsite, vektoreiden perusominaisuudet ja peruslaskutoimitukset sekä kaksi- ja useampiulotteisten vektoreiden käyttö erilaisissa yhteyksissä. Trigonometrian kanssa jaetulla kurssilla kovinkaan syvällisesti vektoreihin ei ehditä perehtyä. Pitkän matematiikan syventävien kurssien aihe ehdotuksissa vektoreita ei mainita lainkaan. Trigonometria ja vektorit -kurssi on lisäksi merkitty kuudenneksi kurssiksi ja sitä ennen on käsitelty sekä geometria että analyyttinen geometria, joten näilläkään kursseilla vektoreita ei päästä soveltamaan.

Vektoreiden opetus lukiossa vuoden 1994 opetussuunnitelman mukaisesti jää lyhyessä matematiikassa useimmilta kokonaan pois ja pitkässäkin matematiikassa vain yhden jaetun kurssin varaan. Myöskään annettu kurssisisältö ei anna tarkkoja sisältöjä, mitä vektoreista tulisi opettaa, vaan jää opetuksentarjoajan päätettäväksi. Mitä esimerkiksi tarkoittaa maininta: “erilaisissa yhteyksissä”?

3.7.1 Opetussuunnitelman toteutuminen oppikirjoissa

Lyhyen matematiikan kirjoja ei ole käsitelty, koska opetussuunnitelmassa ei mainita vektoreita lyhyellä matematiikalla. Pitkän matematiikan oppikirjassa Vektorit ja trigonometria [17] vektoreille on ajankäyttöehdotuksessa varattu noin kaksi kolmannesta kurssin opiskeluun varatuista tunneista. (Kurssin kesto 38 oppituntia.)

Vektoreiden käsittely aloitetaan erilaisista suureista, joista päädytään vektorin käsitteeseen ja sen perusominaisuuksiin. Seuraavaksi käsitellään peruslaskutoimitukset, pituuden laskeminen sekä skalaaritulo. Kaikkien laskutoimitusten laskulakeja on käyty perustellen läpi. Lisäksi kurssin aikana käydään läpi vektorin jakaminen komponentteihin, aluksi yleisesti ja myöhemmin koordinaatiston yksikkövektoreiden avulla, sekä vektorit kaksi- ja kolmiulotteisessa avaruudessa.

Soveltavampina aiheina kurssilla käsitellään vektoreiden avulla geometristen todistusten tekemistä, esimerkiksi kolmion merkillisten pisteiden todistuksien kautta (ks. esimerkki 2). Lisäksi perehdytään suoraan ja tasoon vektoreiden avulla, esimerkiksi suuntavektorit ja pisteen etäisyys suorasta ja tasosta.

Kaikkiaan kirjassa käsitellään melko laajasti vektoreita ottaen huomioon, että samaan kurssiin kuuluu myös trigonometriaa. Käsittelytapa on myös melko perusteellinen ja perusteleva, vaikkei aivan kaikkea todistetakaan. Kirjassa on myös käsitelty skalaaritulo, mikä ei välttämättä sisältyisi peruslaskutoimituksiin, jotka opetussuunnitelman perusteissa on mainittu. Tässä kirjan tekijällä on tietenkin oikeus tulkita opetussuunnitelmaa.

3.8 Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004

Vuonna 2004 vahvistetussa peruskoulun opetussuunnitelman perusteissa [36] matematiikan oppisisällöissä ei ole mainittu vektoreita. Peruskoulussa ei tämän opetussuunnitelman mukaisesti ole opetettu vektoreita.

3.9 Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003

Vuonna 2003 hyväksyttiin uudet lukion opetussuunnitelman perusteet [35], jotka on määrätty noudatettaviksi 1.8.2005 alkaen. Näissä pitkän oppimäärän tavoitteeksi esitetään matemaattiset valmiudet, joita tarvitaan ammatillisissa opinnoissa sekä korkeakouluopinnoissa. Lyhyen oppimäärän tavoitteeksi esitetään valmiudet käyttää matematiikkaa elämän eri tilanteissa ja jatko-opinnoissa. Korkeakouluja ei kuitenkaan lyhyen oppimäärän tavoitteissa mainita, eikä pitkän oppimäärän kohdalla erotella, mihin korkeakouluopintoihin se valmistaa. Tämä eroaa aiemmista opetussuunnitelmista siinä, ettei pitkä oppimäärä ole enää matemaattis-luonnontieteellisille aloille suuntaava ja lyhyt oppimäärä humanistisille aloille suuntaava.

Lyhyessä matematiikassa vektorit mainitaan ainoastaan syventävällä kurssilla Matemaattisia malleja III. Tällä kurssilla tavoitteena on, että opiskelija ”laajentaa käsitystään teknologisoituvassa yhteiskunnassa tarvittavasta matematiikasta” [35, s.128]. Kurssin keskeisiksi sisällöiksi on mainittu peruskäsitteistö sekä peruslaskutoimitukset, koordinaatiston vektoreiden komponenttiesitys sekä skalaaritulo. Lisäksi mainitaan kaksi- ja kolmiulotteisen koordinaatiston pisteiden ja kulmien tutkiminen vektoreiden avulla. Kokonaan kurssia ei kuitenkaan ole varattu vektoreiden käsittelyyn, vaan tarkoitus on käsitellä myös trigonometrisia funktioita. Melko laaja sisältö vektoreista on saatavilla lyhyestäkin matematiikasta, mutta ei pakollisilla kursseilla vaan vasta syventävillä, joita kaikki opiskelijat eivät käy. Kurssin vapaaehtoisuuden vuoksi vektoreita ei luultavasti sovelleta muilla kursseilla. Lisäksi kurssi on merkitty opetussuunnitelmaan viimeiseksi, joten se luultavasti käsitellään monissa kouluissa melko myöhään. Tällöin muilla kursseilla vektoreita ei päästä soveltamaan, mutta toisaalta vektorikurssilla voitaisiin ajan salliessa soveltaa vektoreita aiempiin aiheisiin.

Pitkässä oppimäärässä vektoreita käsitellään yhdellä kurssilla, joka on varattu kokonaan vektoreille. Vektorit -kurssin yleisissä tavoitteissa mainitaan vektorikäsitteen ymmärtäminen ja perehtyminen vektorilaskennan perusteisiin. Lisäksi tavoitteissa esitellään soveltavampaa vektoreiden käyttöä, kuten tavoite oppia tutkimaan kuvioiden ominaisuuksia vektoreiden avulla sekä tutkia kaksi- ja kolmiulotteisen koordinaatiston pisteitä, etäisyyksiä sekä kulmia vektoreiden avulla. Tarkemmin sisältöä on avattu keskeisissä sisällöissä, joissa mainitaan muun muassa peruskäsitteistö ja peruslaskutoimitukset sekä koordinaatiston vektoreiden skalaaritulo sekä suorat ja tasot avaruudessa.

Vektorit kurssi on asetettu opetussuunnitelmassa viides kurssi, kun taas geometria on kolmas ja Analyyttinen geometria neljäs kurssi. Jos kurssit käydään järjestyksessä, on geometriat käsitelty jo ennen vektoreita, joten vektoritehtävissä näitä aiheita voitaisiin hyödyntää. Toisaalta vektoreita ei voida käyttää esimerkiksi analyyttisen geometrian kurssilla, koska vektoreita ei ole vielä käsitelty. Kurssit aiheuttavat näin vaikeutta integroida sisältöjä.

Vuoden 2003 lukion opetussuunnitelmassa vektoreille on pitkässä oppimäärässä yksi pakollinen kurssi, mutta lyhyessä oppimäärässä vain osa kurssista. Molemmissa käsitellään peruskäsitteet sekä peruslaskutoimitukset, mutta pitkässä oppimäärässä on enemmän soveltavaa sisältöä. Molemmissa oppimäärissä vektoreita käsitellään kuitenkin vain skalaarituloon asti, joten melko vähäisiksi jää vektoreista opitut sisällöt tämän opetussuunnitelman aikana. Koulut voivat toki järjestää koulukohtaisia syventäviä kursseja, joiden sisältöjä ei tässä yhteydessä käsitellä. Opetussuunnitelman erittelemät sisällöt antavat kuitenkin kattavan kuvan siitä, mitä vektoreista tulisi opettaa, eikä tästä jää juuri tulkinnan varaa oppikirjojen tekijöille.

3.9.1 Opetussuunnitelman toteutuminen oppikirjoissa

Lyhyen matematiikan oppikirjana tämän opetussuunnitelman ajalta käsiteltiin Sigma 8, Matemaattisia malleja III kirjaa [2]. Kirjan aiheina käsitellään trigonometriset funktiot ja yhtälöt, trigonometriset funktiot jaksollisten ilmiöiden malleina, geometriaa sekä vektoreita. Vektoreita käsitellään noin kolmannes kirjasta.

Ensimmäisenä vektori määritellään suuntajanaksi, jolloin luvussa 2.1 esitetty yhteys suuntajanan ja vektorin eroista häivytetään. Käsittely jatkuu ripeästi peruskäsitteiden kautta peruslaskutoimituksiin. Käsittelyssä ei juurikaan käytetä aikaa asioiden perusteluun tai todistamiseen. Kurssiin on sisällytetty paljon asiaa, jolloin asioiden perusteellinen käsittely on jäänyt vähemmälle.

Peruslaskutoimitusten lisäksi kurssilla käsitellään vektorin komponentteihin jako, paikkavektori sekä vektorit kaksi- ja kolmiulotteisessa koordinaatistossa ja näiden kantavektorit. Vektoreista päästään näiden avulla laskemaan pituutta sekä määrittämään kahden pisteen välistä vektoria. Lopuksi käsitellään vielä skalaaritulo ensin skalaarikomponentin avulla ja myöhemmin vektoreiden välisen kulman avulla (ks. luku 2.4).

Kokonaisuutena vektoreiden opetus tässä kirjassa etenee melko nopeasti tarjoillen irralliseksi jääviä laskutoimituksia vektoreilla, joita ei kuitenkaan hyödynnetä muissa yhteyksissä. Kaikki opetussuunnitelman määrittämät sisällöt tulevat kyllä käsitellyksi, mutta käytössä oleva aika tuntuu olevan liian lyhyt, jotta asiat saataisiin perusteellisesti opetettua.

Pitkän matematiikan käsiteltävänä kirjana on saman sarjan kirja Pitkä Sigma 5, vektorit [11], jossa on miltei samat tekijät kuin lyhyen oppimäärän kirjassa. Kurssilla käsitellään pelkästään vektoreita, joten niille on enemmän aikaa, kuin lyhyessä matematiikassa. Eteneminen on kuitenkin hyvin samankaltaista. Aluksi käsitellään peruskäsitteet sekä peruslaskutoimitukset. Tehtävissä korostuu kuitenkin enemmän vektoreiden soveltaminen analyyttisen geometrian asioihin. Pidemmälle edetessä käsittely muuttuu perustelevammaksi ja esimerkiksi skalaaritulosta johdetaan sen geometrinen merkitys ja tästä perustellaan vektoreiden kohtisuoruusehto (ks. määritelmä 2.10). Varsinaisia laskulakien todistuksia ei tässäkään kirjassa juurikaan näy. Joitakin laskulakien todistuksia on laitettu tehtäviin, mutta nämäkin on niin kutsuttuja jokeritehtäviä, joten kaikki opiskelijat eivät niihin luultavasti tutustu.

Pitkän matematiikan kirja eroaa lyhyestä erityisesti soveltavuuden osalta. Kirjassa on muun muassa kappale, jossa todistetaan vektoreiden avulla geometristen kuvioiden ominaisuuksia. Lisäksi kirjassa käsitellään suoraa ja tasoa vektoreiden avulla ja määritetään näille vektorimuotoiset yhtälöt. Vektoreita sovelletaan myös pisteen etäisyyden selvittämiseen tasosta sekä suorasta.

Pitkän matematiikan kirja tarjoaa paljon enemmän mahdollisuuksia liittää vektoreita aiemmin opittuihin matematiikan asioihin ja käyttää niitä matemaattisesti järkeviin tehtäviin, esimerkiksi etäisyyksien laskemiseen. Yhteyttä fysiikkaan ei kuitenkaan luoda, mikä voisi vielä enemmän liittää vektoreita opiskelijoiden kokemusmaailmaan ja tehdä vektoreista käytetyn työkalun. Kaikki opetussuunnitelmassa esitetyt asiat tulevat kuitenkin käydyksi läpi ja tahdin ollessa hieman rauhallisempi kuin lyhyen matematiikan kirjassa, on syvällisempi oppiminenkin helpompaa.

3.10 Katsaus tulevaisuuteen

Seuraavasta peruskoulun opetussuunnitelman perusteista, jonka on tarkoitus astua voimaan vuonna 2016, on esittelyssä luonnokset [37]. Matematiikan luonnoksessa opetus 7–9 luokilla, vektoreita ei ole mainittu lainkaan opetettavissa sisällöissä, joten mitä luultavimmin vektorit ei ole palaamassa peruskouluun seuraavan opetussuunnitelman perusteiden aikana. Myös lukioon on astumassa voimaan uusi tuntijako vuonna 2016, mutta tämän sisältöä ei tämän tutkielman tekohetkellä ole vielä täysin päätetty. Tulevasta ei siis voida sanoa paljoakaan. Peruskouluun vektorit eivät kuitenkaan ole lähiaikoina palaamassa.

4 Yhteenveto

Tässä luvussa vertaillaan aiemmin esiteltyjä opetussuunnitelmia sekä oppikirjoja ja kootaan niistä saatuja tuloksia. Tutkielman tarkoituksenahan oli selvittää, kuinka paljon vektorialgebraa on opetettu on opetettu kullekin vuosiluokalle eri opetussuunnitelmien mukaan. Lisäksi selvitettiin, millaisen pohjan opetussuunnitelma on antanut oppikirjojen tekemiseen ja kuinka opetussuunnitelma oppikirjoissa toteutuu.

Vektorialgebran opetus tuli Suomen kouluihin 1970-luvulla suurella innolla ja sitä opetettiin sekä peruskoulussa että lukiossa ([18, 23]). Peruskouluun vektoreiden opetuksen toi innostus niin kutsutusta uudesta matematiikasta, johon kuului muun muassa joukko-opin mukainen opetus. Innostus kuitenkin laantui melko pian ja tämän myötä myös vektoreiden opetus katosi peruskoulusta. Sisällöt olivat tällöin kuitenkin vielä päällekkäisiä, joten lukiossa opetus aloitettiin alusta ja siinä edettiin skalaarituloon asti. Pitkällä kurssilla syventävänä sisältönä saatettiin käsitellä myös vektoritulo.

Lukiossa vektorialgebran opetus oli vielä seuraavan opetussuunnitelman (1985 [25]) ajan samanlaajuista eli sitä opetettiin sekä lyhyemmällä että laajemmalla kurssilla skalaarituloon asti. Vuoden 1994 opetussuunnitelmassa [34] vektorialgebra kuitenkin jätettiin kokonaan pois lyhyestä matematiikasta ja pitkästä matematiikasta skalaaritulo jäi pois. Vektorialgebran opetus supistui tämän opetussuunnitelman myötä selvästi.

Viimeisin lukion opetussuunnitelma vuonna 2003 [35] nosti vektorialgebran lyhyen oppimäärän syventävälle kurssille, joka on valinnainen. Kurssilla käsitellään asioita miltei yhtä laajasti kuin pitkässä oppimäärässäkin eli skalaarituloon asti. Pitkässä matematiikassa skalaaritulo palasi takaisin kurssin vaatimuksiin ja soveltavaa käyttöä lisättiin.

Yhteenvetona voidaan todeta, että 1970-luvun alkuinnostuksen jälkeen vektorialgebran opetus on pikkuhiljaa supistunut, mutta viimeisin opetussuunnitelma nosti sitä hieman takaisinpäin. Kenties suuntana ei enää ole vektorialgebran opetuksen vähentäminen. Matematiikan opetus on kuitenkin suuressa murroksessa, kun laskimet kehittyvät ja ylioppilaskirjoituksissa ollaan siirtymässä sähköisiin kokeisiin. Vektorialgebran asemaa on vaikea ennustaa tässä murroksessa.

Kaikissa tutkituissa opetussuunnitelmissa opetettavat sisällöt on eroteltu melko tai todella yksityiskohtaisesti. Jonkin verran tulkinnan varaa sanamuodot toki jättävät, mutta pääosin haluttu linja on hyvin tullut esille. Tulkinnanvaraisuudesta huolimatta voidaan todeta, että tutkitut oppikirjat ovat noudattaneet kansallisia opetussuunnitelmia hyvin kaikilla vuosikymmenillä. Joissakin kirjoissa on käsitelty asioita jopa laajemmin, mutta kaikki opetussuunnitelman asettamat tavoitteet ovat tutkituissa oppikirjoissa toteutuneet. Suurin osa kirjoista on hankittu kirjastojen arkistoista, joihin on luultavimmin talletettu eniten käytössä olleet oppikirjat, ja näin ollen kirjat antavat melko luotettavan kuvan siitä, kuinka matematiikkaa on kyseisellä ajanjaksolla opetettu.

Oppikirjoissa oli havaittavissa eroja eri vuosikymmenten välillä. Suurin ero on tullut lukio-opetuksen muututtua kurssimuotoiseksi vuoden 1981 jälkeen. Tämä on muokannut oppikirjoistakin tarkasti rajattuja kokonaisuuksia, jotka keskittyvät kurssin aiheeseen. Esimerkiksi vektoreiden käsittely on keskittynyt yhdelle tai kahdelle kurssille ja soveltavampi käyttö esimerkiksi analyyttisen geometrian apuvälineenä on vähentynyt. 1970-luvun ei-kurssimuotoisessa opetuksessa integrointia oli havaittavissa enemmän. Tällöin oppikirjoja oli vain yksi kullekin vuosiluokalle ja näin asioiden yhdistäminen oli helpompaa. Esimerkiksi tuon aikaisessa pitkän kurssin kirjassa [12] vektoreiden käsittelyä jatkettiin trigonometrian ohessa. Vielä 1980-luvulla kirjat olivat vuosiluokkalle tarkoitettuja ja ne sisälsivät useampia kursseja. Tällöinkin asioiden yhdistäminen oli helpompaa kuin uudemmissa kirjoissa, jotka ovat kurssikohtaisia.

Vektorialgebran opetus on ollut alamäessä laajuutta ajatellen 1970-luvulta asti kunnes 2003 lukion opetussuunnitelmassa sitä palautettiin käsiteltäväksi myös lyhyellä oppimäärällä. Tulevaisuuden suunnasta on vaikea sanoa mitään. Vuonna 2016 pitäisi astua voimaan uusi peruskoulun opetussuunnitelman perusteet sekä lukion uusi tuntijako. Näiden tuomia muutoksia ei vielä voida tietää, vaan jäädään odottamaan mielenkiinnolla.

Lähteet

[1] J. Honkonen, T. Perko ja M. Pitkänen. *Fysiikan matemaattiset apuneuvot.* Kruunuhaka: Limes ry, 2003.

[2] S. Hassinen , K. Hemmo ja T. Taskinen. *Sigma 8, matemaattisia malleja.* Vammala: Vammalan kirjapaino Oy, 2007.

[3] P. Haukkanen. *Lineaarialgebra 1 A.* Saatavilla: `http://www.uta.fi/sis/mtt/mttmp3.html` (Luettu 10.07.2014)

[4] P. Hwei, Ph.D. Hsu. *Vector analysis.* New York: Simon ans Schuster, 1969.

[5] P. Inkeroinen ja U. Mattila. *Derivaatasta ja differentiaalilaskennan kouluopetuksesta eri aikoina.* Tampereen yliopisto, 2008.

[6] S. Kivelä. *Lukiotason matemaiikan tietosanakirja*, 2000. Saatavilla: `https://matta.hut.fi/matta2/isom/html/index.html` (Luettu 27.06.2014)

[7] M. Luhtalahti, M. Urponen, K. Suomela, P. Häkkinen, S. Mäki-Turja, O. Perttula ja S. Pohjonen. *Johdatus Korkeakoulumatematiikkaan*, 1996. Saatavilla: `http://matwww.ee.tut.fi/jkkm/index.htm` (Luettu 27.6.2014)

[8] M. Saarimäki. *Vektorilaskentaa euklidisissa avaruuksissa.* Jyväskylän yliopisto, 2012. Saatavilla: `http://www.math.jyu.fi/matpo/kirja/vea/VEKTORILASKENTAA%20EUKLIDISISSA%20AVARUUKSISSA.pdf` (Luettu 21.8.2014)

[9] R. Silvennoinen. *Insinöörimatematiikka 2u*, 2012. Saatavilla: `http://www.math.tut.fi/courses/ima/A2/materiaali.htm` (Luettu 10.07.2014)

[10] K. Väisälä. *Vektorianalyysi.* Porvoo: Werner Söderström osakeyhtiö, 1972.

Aineistot

[11] S. Alatupa, S. Hassinen, K. Hemmo, M. Leikas ja T. Taskinen. *Pitkä Sigma: lukion pitkä matematiikka. 5, Vektorit.* Helsinki: Tammi, 2010.

[12] M. Apajalahti, Y. Laine ja R. Tanskanen. *Lukion matematiikka 1, pitkä kurssi.* Keuruu: Otava, 1975.

[13] M. Apajalahti, Y. Laine ja R. Tanskanen. *Lukion matematiikka 2, pitkä kurssi.* Keuruu: Otava, 1975.

[14] M. Apajalahti, Y. Laine ja R. Tanskanen. *Lukion matematiikka 3, pitkä kurssi.* Keuruu: Otava, 1981.

[15] J. Hakalehto, S. Honkanen, L. Kaila ja E. Ranta. *Matematiikka 5.* Porvoo: Werner Söderströmin Osakeyhtiön laakapaino, 1970.

[16] N. Kallio, B. Malmio ja S. Apajalahti. *Geometria 2. Lukion oppimäärä.* Keuruu: Otava, 1969.

[17] J. Kangasaho, J. Mäkinen, P. Oikkonen ja M. Salmela. *Pitkä matematiikka, Vektorit ja Trigonometria.* Porvoo: WS Bookwell Oy, 2002.

[18] Komiteamietintö 1970: A 5. *Peruskoulun opetussuunnitelmakomiteanmietintö II, oppiaineiden opetussuunnitelmat.* Helsinki: Valtion painatuskeskus.

[19] Komiteamietintö 1977:2. *Lukion opetussuunnitelmatoimikunnan mietintö II C.* Helsinki.

[20] Kouluhallitus. *Keskikoulun matematiikan oppiennätykset.* Helsinki, 1958. (Ryhmäkirje valtion ja yksityisten oppikoulujen samoin kuin kansakoulujen yhteydessä toimivien keskikoulujen rehtoreille.)

[21] Kouluhallitus. *Lukion matematiikan oppiennätykset.* Helsinki, 1960. (Yleiskirje valtion ja yksityisten oppikoulujen sekä kansakoulujen yhteydessä toimivien keskikoulujen rehtoreille.)

[22] Kouluhallitus. *Pops-70, Matematiikka. Opas 6.*

[23] Kouluhallitus. *Matematiikan opetussuunnitelmat -lukion opetussuunnitelmat.* Helsinki: Valtion painatuskeskus, 1974.

[24] Kouluhallitus. *Lukion kurssimuotoinen oppimäärä ja oppimääräsuunnitelma, matematiikka.* Helsinki: Valtion painatuskeskus, 1981.

[25] Kouluhallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1985.* Helsinki: Valtion painatuskeskus.

[26] Kouluhallitus. *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1985.* Helsinki: Valtion Painatuskeskus.

[27] Y. Laine ja P. Malinen. *Lukion matematiikka 3, lyhyt kurssi.* Keuruu: Otava, 1975.

[28] Y. Laine ja P. Malinen. *Lukion matematiikka 1, lyhyt kurssi.* Keuruu: Otava, 1976.

[29] Y.Laine ja P. Malinen. *Lukion matematiikka 2, lyhyt kurssi.* Keuruu: Otava, 1976.

[30] H. Miinala, H. Salimäki ja M. Vuorinen. *Uuden lukion matematiikka, laaja oppimäärä 1.* Porvoo: WSOY, 1987.

[31] H. Miinala, H. Salimäki ja M. Vuorinen. *Uuden lukion matematiikka, laaja oppimäärä 2.* Porvoo: WSOY, 1986.

[32] H. Miinala, H. Salimäki ja M. Vuorinen. *Uuden lukion matematiikka, laaja oppimäärä 3.* Porvoo: WSOY, 1986.

[33] Opetushallitus. *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 1994.* Helsinki: Painatuskeskus.

[34] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 1994.* Helsinki: Painatuskeskus.

[35] Opetushallitus. *Lukion opetussuunnitelman perusteet 2003.* Vammala: Vammalan kirjapaino Oy.

[36] Opetushallitus. *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet 2004.* Vammala: Vammalan kirjapaino Oy. Saatavilla: `http://www.oph.fi/download/139848_pops_web.pdf`. (Luettu 24.06.2014)

[37] Opetushallitus. *Peruskoulun opetussuunnitelman perusteet: opetus vuosiluokilla 7–9.* Luonnos 2014. Saatavilla: `http://www.oph.fi/download/160362_opsluonnos_perusopetus_vuosiluokat_7_9_19092014.pdf`. (Luettu 23.9.2014)

[38] *Pohjoismainen koulumatematiikka. Mietinnön suomenkielinen lyhennelmä.* Stockholm 1967.

[39] *Valtion oppikoulujen oppiennätykset ja metodiset ohjeet.* Helsinki: Valtioneuvoston kirjapaino, 1941.

[40] K. Väisälä. *Algebran oppi- ja esimerkkikirja 2. Pitempi kurssi.* Porvoo: Werner Söderströmin Osakeyhtiön laakapaino, 1970.

[41] C.G. Wolff, R. Holmström ja R. Paltakari. *Matematiikan tiedot 7. kouluvuotta varten.* Helsinki: Yhteiskirjapaino Oy, 1971.

[42] C.G. Wolff, R. Holmström ja R. Paltakari. *Matematiikan tiedot 8. kouluvuotta varten.* Helsinki: Yhteiskirjapaino Oy, 1973.

[43] C.G. Wolff, R. Holmström ja R. Paltakari. *Matematiikan tiedot 9. kouluvuotta varten.* Helsinki: Yhteiskirjapaino Oy, 1973.

[44] H. Wuolijoki ja P. Mäntyniemi. *Akseli 1. Matematiikan yleinen oppimäärä.* Espoo: Weilin + Göös, 1985.

[45] H. Wuolijoki ja P. Mäntyniemi. *Akseli 2. Matematiikan yleinen oppimäärä.* Espoo: Weilin + Göös, 1986.

[46] H. Wuolijoki ja P. Mäntyniemi. *Akseli 3. Matematiikan yleinen oppimäärä.* Espoo: Weilin + Göös, 1985.